Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ПЛОЩАДИ
и
ЛОГАРИФМЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 9

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ПЛОЩАДИ
И
ЛОГАРИФМЫ

Издание второе,
исправленное и дополненное

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.14
М 26
УДК 512

22.14 (512)

Маркушевич А. И.

Площади и логарифмы. М.— Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 64 с.— (Популярные лекции по математике.)

Книга излагает геометрическую теорию логарифмов, в которой логарифмы (натуральные) появляются как некоторые площади, и все их свойства, а также способы их вычисления выводятся из свойств последних. Вместе с тем книжка знакомит с простейшими понятиями и свойствами интегрального исчисления, не используя понятия производной.

Предназначается она всем любителям математики, в особенности школьникам. Необходимые для понимания ее сведения они имеют уже в начале второй четверти *восьмого* класса.

М $\frac{20203-056}{053(02)-79}$ 93-79

Алексей Иванович Маркушевич

ПЛОЩАДИ И ЛОГАРИФМЫ

(Серия: «Популярные лекции по математике»)

М., 1979 г., 64 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*
Техн. редактор *Н. В. Кошелева*
Корректоры *О. А. Бутусова, Е. В. Сидоркина*

ИБ № 11410

Сдано в набор 31.07.78. Подписано к печати 05.03.79. Бумага 84×108$^1/_{32}$, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 3,36. Уч.-изд. л. 3,17. Тираж 200 000 экз. Заказ № 1216. Цена книги 10 коп.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1979, с изменениями.

М $\frac{20203-056}{053(02)-79}$ 93-79. 1702030000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Лекция «Площади и логарифмы» была прочитана мною осенью 1951 г. в Московском университете для большой аудитории школьников 9 и 10 классов — будущих участников математической олимпиады. Цель лекции — изложить геометрическую теорию логарифмов, в которой логарифмы появляются как некоторые площади и все свойства логарифмов выводятся из свойств площадей. Вместе с тем лекция знакомит с простейшими понятиями и фактами интегрального исчисления, не используя понятия производной.

В настоящей брошюре эта лекция приведена с некоторыми небольшими добавлениями. Приступая к чтению, читатель может и не знать, что́ такое логарифмы. От него требуется лишь первоначальное знакомство с простейшими функциями и их графическим изображением, с геометрической прогрессией и понятием предела. Все эти сведения уже имеются у учащихся восьмых классов в начале второй четверти учебного года.

Таким образом, показано, что понятие интеграла в наглядной форме может быть дано школьникам, по крайней мере, на 2 года раньше, чем это делается теперь; от этого преподавание физики и геометрии могло бы выиграть.

Если читатель захочет расширить сведения о логарифмах, вынесенные из этой брошюры, то он может обратиться к книге И. Б. Абельсона «Рождение логарифмов» и к книге А. И. Маркушевича «Ряды», последняя глава которой содержит иное, чем в этой брошюре, построение теории логарифмов.

Настоящее издание содержит Приложение, в котором дается формула Симпсона вместе с некоторыми ее применениями. В частности, подсчитывается число π.

Автор

1. Пусть дана некоторая функция. Это означает, что указан способ, по которому для каждого значения x можно найти соответствующее этому x значение y (значение функции). Чаще всего функции задаются формулами. Например, формула $y = x^2$ определяет y как функцию от x. Здесь для каждого числа x (например, $x = 3$) соответствующее значение y получается путем возведения этого числа в квадрат ($y = 9$). Формула $y = 1/x$ определяет другую функцию. Здесь для каждого x, не равного нулю, соответствующее значение y есть число, обратное x; если $x = 2$, то $y = {}^1/_2$, если $x = -{}^1/_2$, то $y = -2$.

Если говорят о функции, не указывая, какая именно функция рассматривается, то пишут: $y = f(x)$ (читают так: «y есть эф от x»). Это и означает, что y есть некоторая функция от x (быть может, $y = x^2$, или $y = 1/x$, или еще какая-нибудь функция). Этот способ обозначения функций напоминает идею обозначения чисел буквами. Ведь можно говорить о числах: 2, $-{}^1/_2$, $\sqrt{2}$, а можно говорить также о числе a, подразумевая под a число 2, $-{}^1/_2$, $\sqrt{2}$ или еще какое-нибудь число. Подобно тому как для обозначения чисел пользуются разными буквами, так и для обозначения функций, помимо записи $y = f(x)$, пользуются также и другими, например $y = g(x)$, $y = h(x)$ и т. д.

Так, если в одном и том же вопросе приходится говорить о двух функциях, то, обозначая одну через $y = f(x)$, другую обозначают через $y = g(x)$ и т. п.

Функцию $y = f(x)$ можно изобразить графически. Для этого берут две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy — *оси координат* (рис. 1) — и, выбрав единицу масштаба, откладывают на Ox значения x, а на перпендикулярах к Ox (в плоскости xOy) соответствующие значения $y = f(x)$. При этом соблюдают

правило знаков: положительные числа изображают отрезками, откладываемыми вправо (по оси Ox) или вверх (от оси Ox), а отрицательные — влево или вниз. Напомним, что направленные отрезки, откладываемые от точки O на Ox, называются *абсциссами*, а направленные отрезки, откладываемые от Ox перпендикулярно к этой прямой, называются *ординатами*.

Если указанное построение выполнить для всех возможных значений x, то концы ординат вычертят

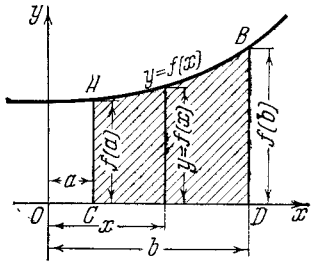

Рис. 1.

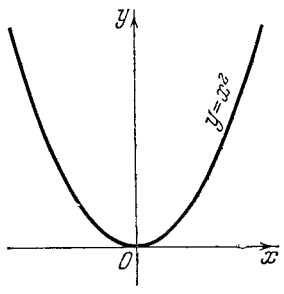

Рис. 2.

на плоскости кривую — график функции $y = f(x)$ (в случае функции $y = x^2$ график представляет параболу; она изображена на рис. 2).

Возьмем на графике (рис. 1) две любые точки A и B и опустим из них перпендикуляры AC и BD на ось Ox. Получим фигуру $ACDB$; такая фигура называется *криволинейной трапецией*. Если, в частности, дуга AB есть отрезок прямой, не параллельной Ox, то получается обычная трапеция и притом прямоугольная. Если же AB — отрезок прямой, параллельной Ox, то получается прямоугольник.

Итак, прямоугольная трапеция и прямоугольник являются частными случаями криволинейной трапеции.

График функции, изображенный на рис. 1, расположен выше оси Ox. Такое расположение возможно только тогда, когда значения функции — положительные числа.

Если бы значения функции были отрицательными, то график расположился бы ниже оси Ox (рис. 3). Условимся в этом случае приписывать площади кри-

волинейной трапеции знак минус и считать ее отрицательной.

Наконец, возможно, что функция на различных участках изменения x имеет разные знаки. Тогда ее график частично располагается выше Ox, а частично ниже Ox; подобный случай изображен на рис. 4. Здесь площадь криволинейной трапеции $A'C'D'B'$ следует считать отрицательной, а площадь $A''C''D''B''$ — *положительной.* Если мы в этом случае возьмем на графике точки A и B так, как это указано на рисунке, и из них опустим перпендикуляры AC и BD на ось Ox, то получим между этими перпендикулярами фигуру, которая на рис. 4 заштрихована. Эта фигура по-прежнему называется криволинейной трапецией; она ограничена дугой $AKA'B'LA''B''B$, двумя ординатами AC и BD и отрезком CD оси абсцисс.

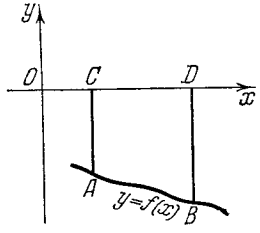

Рис. 3.

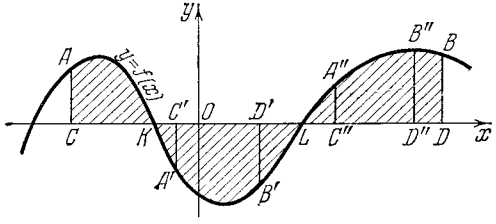

Рис. 4.

Площадь ее мы будем рассматривать как сумму площадей фигур ACK, $KA'B'L$ и $LA''B''BD$, причем площади первой и третьей из них положительны, а площадь второй отрицательна.

Читатель легко поймет, что при этих условиях площадь всей криволинейной трапеции $ACDB$ может оказаться как положительной, так и отрицательной, а в некоторых случаях — равной нулю. Например, график функции

$$y = ax \qquad (a > 0)$$

есть прямая; здесь площадь фигуры $ACDB$ (рис. 5) будет положительной при $OD > OC$, отрицательной

при $OD < OC$ и, наконец, равной нулю, если $OD = OC$.

2. Займемся задачей определения площади S криволинейной трапеции. Необходимость в вычислении таких площадей так часто встречается в различных вопросах математики, физики и механики, что существует специальная наука — интегральное исчисление, — изучающая способы решения этой задачи. Мы начнем с того, что наметим общий план решения задачи, разбив все решение на две части. В первой мы будем отыскивать приближенные значения площади, добиваясь того, чтобы ошибку приближения можно было сделать как угодно малой; во второй части будем переходить от приближенных значений площади к точному.

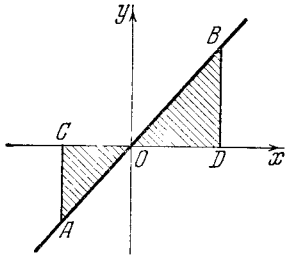

Рис. 5.

Приступая к первой части, заменим криволинейную трапецию $ACDB$ ступенчатой фигурой вида, ука-

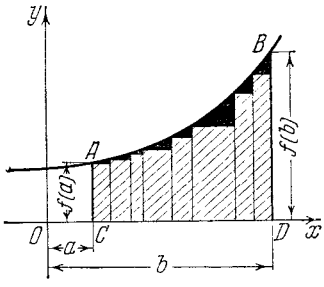

Рис. 6.

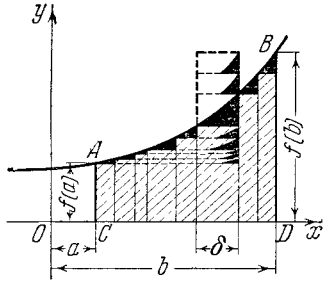

Рис. 7.

занного на рис. 6 (эта фигура заштрихована). Площадь ступенчатой фигуры легко вычислить: она равна сумме площадей прямоугольников. Эту сумму мы и будем рассматривать как приближенное значение искомой площади S.

Заменяя S площадью ступенчатой фигуры, мы делаем некоторую ошибку α; ошибка складывается из

площадей криволинейных треугольников, сплошь зачерненных на нашем рисунке. Чтобы оценить величину ошибки, выберем наиболее широкий прямоугольник и продолжим его так, чтобы высота его сравнялась с наибольшим из значений функции (равным BD в случае рис. 6). Перенесем далее все криволинейные треугольники параллельно оси Ox так, чтобы они попали в этот прямоугольник; они составят в нем зубчатую фигуру в виде края пилы (рис. 7). Так как эта фигура вся умещается в прямоугольнике, то ошибка α, равная сумме площадей зубьев пилы [1]), должна быть меньше площади прямоугольника. Если основание его есть δ (греческая буква «дельта»), то получаем, что $|\alpha| < \delta \cdot BD$. Отсюда следует, что ошибку α можно сделать сколь угодно малой, если взять прямоугольники на рис. 6 столь узкими, чтобы основание δ самого широкого из них было достаточно малым числом. Например, если $BD = 20$, а мы хотим, чтобы площадь ступенчатой фигуры отличалась от S менее чем на 0,001, то достаточно будет взять $\delta \cdot BD = 20\delta$ меньше 0,001, т. е. $\delta < 0{,}00005$; тогда

$$|\alpha| < \delta \cdot BD < 0{,}001.$$

Однако как бы мы ни уменьшали δ, всякий раз будет получаться некоторая хотя бы и очень малая ошибка α, так как площадь криволинейной трапеции не равна площади ступенчатой фигуры. Вторая, и последняя, часть решения задачи заключается в переходе к пределу. Предполагают, что рассматривается не одна и не две, а бесконечное множество ступенчатых фигур таких, какие изображены на рис. 6. Число прямоугольников берут все бóльшим и бóльшим, бесконечно увеличивая его, а основание δ самого широ-

[1]) На рис. 6 и 7 график функции имеет вид подъема на гору (или спуска с горы). Если бы график имел более сложный вид, с чередующимися подъемами и спусками (см., например, рис. 4), то криволинейные треугольники после их перенесения в один прямоугольник могли бы налегать друг на друга и тогда сумма их площадей могла бы оказаться больше, чем площадь прямоугольника. Чтобы применить наше рассуждение и к этому, более сложному случаю, следует разбить всю фигуру на части так, чтобы в пределах одной части график имел вид либо подъема, либо спуска, и проводить рассуждение для каждой части отдельно.

кого из прямоугольников — все меньшим, неограниченно приближая его к нулю. Тогда ошибка α при

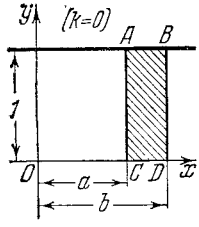

Рис. 8.

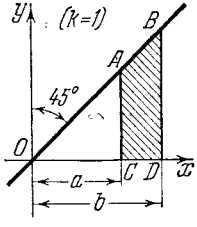

Рис. 9.

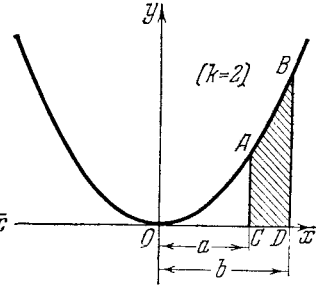

Рис. 10.

замене площади криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры будет становиться все меньше, также неограниченно приближаясь к нулю. Искомая площадь S получится как предел площадей ступенчатых фигур.

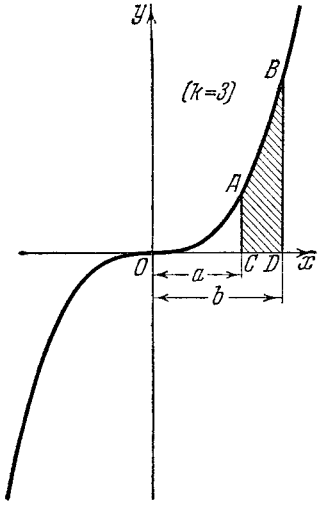

Рис. 11.

3. Последуем по пути, указанному в предыдущем пункте, чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции в том важном частном случае, когда функция $y = f(x)$ есть степень с целым неотрицательным показателем $y = x^k$. Для показателей $k = 0, 1, 2$ получим функции: $y = x^0 = 1$, $y = x^1 = x$, $y = x^2$. Их графики легко построить: это прямая, параллельная Ox и проходящая выше Ox на 1 (рис. 8), биссектриса угла xOy (рис. 9) и парабола (рис. 10).

Если брать более высокие показатели степеней, то получатся функции $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, графики которых представлены на рис. 11, 12 и 13.

Если k — число нечетное, то графики симметричны относительно точки O (рис. 9, 11, 13), если же k — четное, то они симметричны относительно оси Oy (рис. 8, 10, 12).

Если $k \geqslant 1$, то графики проходят через точку O. При этом чем больше k, тем теснее прилегают они к оси Ox вблизи точки O и в то же время тем круче взмывают вверх (или падают вниз) по мере того, как отходят от точки O.

На каждом из рис. 8—13 заштрихованы криволинейные трапеции. Их площади легко найти, если $k = 0$

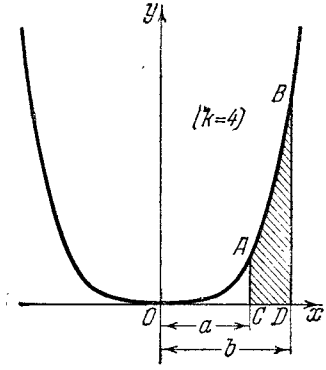

Рис. 12.

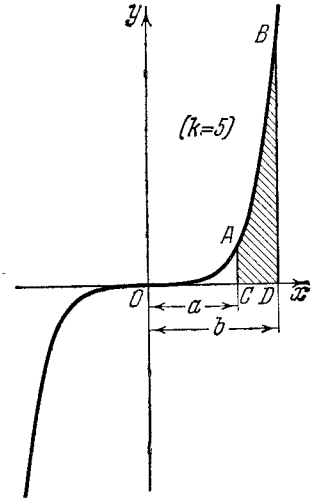

Рис. 13.

и $k = 1$. А именно, если $k = 0$, то площадь $ACDB$ равна $CD \cdot AC = (b - a) \cdot 1 = b - a$; если же $k = 1$, то площадь $ACDB$ равна

$$CD \cdot \frac{AC + BD}{2} = (b - a)\frac{a + b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Докажем, что если $k = 2$, то площадь $ACDB$ равна $\frac{b^3 - a^3}{3}$; если $k = 3$, то площадь $ACDB$ равна $\frac{b^4 - a^4}{4}$ и т. д. В общем случае, где k — какое угодно целое неотрицательное число, докажем, что площадь соответствующей криволинейной трапеции равна

$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. Очевидно, что этот общий результат охватывает все отмеченные перед этим частные случаи.

Чтобы легче было следить за дальнейшими выкладками, возьмем определенное числовое значение показателя k, например $k=5$. Кроме того, предположим, что $0<a<b$. Мы рассмотрим, следовательно, график функции $y=x^5$ и, осуществляя план, намеченный в п. 2, докажем, что площадь криволинейной трапеции $ACDB$ (рис. 14) равна $\frac{b^6-a^6}{6}$.

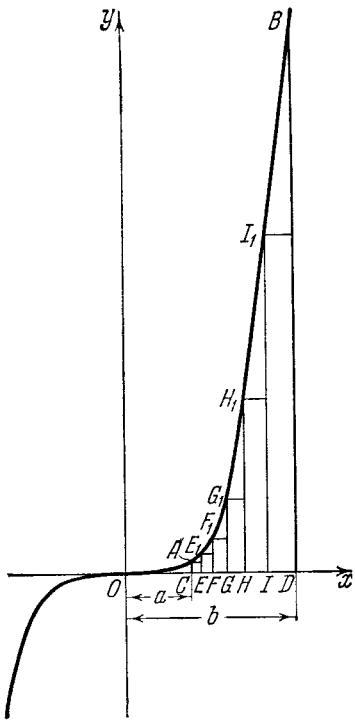

Рис. 14.

4. Нам придется подсчитывать сумму площадей весьма большого числа прямоугольников — частей ступенчатой фигуры (рис. 14). Для упрощения работы подберем прямоугольники так, чтобы их площади составили геометрическую прогрессию. Для этого возьмем точки E, F, G, H, ..., I на Ox так, чтобы длины $OC=a$, OE, OF, OG, ..., OI, $OD=b$ составили геометрическую прогрессию; число членов этой прогрессии обозначим через $n+1$, а знаменатель ее — через q (так как $b>a$, то $q>1$). Тогда будем иметь равенства:

$$OC=a,\quad OE=aq,\quad OF=aq^2,$$
$$OG=aq^3,\ \ldots,\quad OI=aq^{n-1},\quad OD=aq^n=b.$$

На рис. 14 изображены 6 прямоугольников и, следовательно, $n+1=7$, но мы будем предполагать в дальнейшем, что n — как угодно большое число, например $n=1000$, 10 000, 100 000 и т. д.

Основания прямоугольников образуют геометрическую прогрессию с тем же знаменателем q:

$$CE = OE - OC = a(q-1),\ EF = OF - OE = aq(q-1),$$
$$FG = OG - OF = aq^2(q-1),\ \ldots,$$
$$ID = OD - OI = aq^{n-1}(q-1)$$

(число членов этой и следующих прогрессий равно n, а не $n+1$).

Высотами прямоугольников являются ординаты CA, EE_1, FF_1, GG_1, ..., II_1; каждая из них равна пятой степени соответствующей ей абсциссы (мы ведь приняли, что $y = x^5$). Следовательно,

$$CA = OC^5 = a^5,\quad EE_1 = OE^5 = a^5q^5,\quad FF_1 = OF^5 = a^5q^{10},$$
$$GG_1 = a^5q^{15},\ \ldots,\ II_1 = OI^5 = a^5q^{5(n-1)}.$$

Мы видим, что высоты прямоугольников также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^5 $(=q^k)$.

Так как основания прямоугольников составляют прогрессию со знаменателем q, а высоты — прогрессию со знаменателем q^5 $(=q^k)$, то площади прямоугольников должны образовывать прогрессию со знаменателем $qq^5 = q^6\,(=q^{k+1})$:

$$CE \cdot CA = a(q-1)a^5 = a^6(q-1);$$
$$EF \cdot EE_1 = aq(q-1)a^5q^5 = a^6q^6(q-1);$$
$$FG \cdot FF_1 = aq^2(q-1)a^5q^{10} = a^6q^{12}(q-1);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$ID \cdot II_1 = aq^{n-1}(q-1)a^5q^{5(n-1)} = a^6q^{6(n-1)}(q-1).$$

Поэтому сумма площадей прямоугольников, равная площади ступенчатой фигуры, есть сумма геометрической прогрессии с первым членом $a^6(q-1)$, последним членом $a^6q^{6(n-1)}(q-1)$ и знаменателем q^6:

$$\frac{a^6q^{6(n-1)}(q-1)q^6 - a^6(q-1)}{q^6-1} = [(aq^n)^6 - a^6]\frac{q-1}{q^6-1} =$$
$$= \frac{b^6 - a^6}{q^5+q^4+q^3+q^2+q+1}$$

(мы воспользовались тем, что $b = aq^n$ и $\frac{q^6-1}{q-1} = q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$).

5. Будем неограниченно увеличивать число прямоугольников n. Так как основания прямоугольников составляют возрастающую геометрическую прогрессию ($q > 1$), то первое из этих оснований является наименьшим по сравнению со всеми остальными. Но сумма длин всех n оснований равна $b - a$; поэтому на долю CE приходится менее чем $\frac{b-a}{n}$, т. е. $aq - a < \frac{b-a}{n}$, откуда $q - 1 < \frac{b-a}{na}$.

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю, когда n неограниченно растет; так как левая часть положительна, то и она должна стремиться к нулю, т. е. q стремится к единице.

Отсюда вытекает далее, что q^2, q^3, q^4 и q^5 также стремятся к 1, сумма $q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ стремится к $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$, а следовательно, вся площадь ступенчатой фигуры, равная

$$\frac{b^6 - a^6}{q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1},$$

стремится к пределу

$$\frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Этому пределу и должна равняться искомая площадь криволинейной трапеции:

$$S = \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Такой результат получился у нас при $k = 5$. Если мы провели бы те же выкладки в общем виде для любого натурального k, то получили бы:

$$S = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Итак, мы доказали, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху дугой графика функции $y = x^k$ и заключенной между двумя ординатами с абсциссами a и b, равна $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$.

6. Мы получили результаты предыдущего пункта, предполагая, что $0 < a < b$, т. е. что криволинейная трапеция лежит справа от Oy. Если $a \leq b \leq 0$, то

доказательство ведется тем же путем. Однако, беря знаменатель прогрессии q по-прежнему положительным и бо́льшим единицы, мы должны считать теперь первым членом прогрессии b, а последним a (так как $|a|>|b|$). Повторяя выкладки, придем к тому же результату:

$$S=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Если k — нечетное число, то $k+1$ — четное и, следовательно, b^{k+1} и a^{k+1} — положительные числа, причем первое меньше второго. Поэтому для S получается в этом случае отрицательное число. Но так и должно быть, так как при k нечетном соответствующая криволинейная трапеция лежит ниже Ox (см. левые части рис. 11, 13).

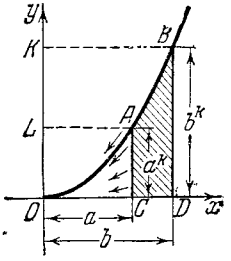

Рис. 15.

Вернемся к случаю $0<a<b$. Если оставить b неизменным, а a заставить стремиться к нулю, то криволинейная трапеция будет растягиваться влево, а при a, равном нулю, обратится в *криволинейный треугольник OBD* (рис. 15) (мы считаем, что $k\geqslant 1$). Очевидно, что при a, стремящемся к нулю, площадь криволинейной трапеции будет стремиться к площади криволинейного треугольника. В самом деле, разность между второй и первой площадями будет меньше, чем площадь $OCAL$, которая сама стремится к нулю. С другой стороны, при a, стремящемся к нулю, площадь криволинейной трапеции (как это видно из найденной формулы) стремится к $\frac{b^{k+1}}{k+1}$. Поэтому площадь криволинейного треугольника ODB равна $\frac{b^{k+1}}{k+1}$, т. е. в $k+1$ раз меньше площади прямоугольника $ODBK$, или, что то же самое, в $k+1$ раз меньше произведения «катетов прямоугольного треугольника» ODB (мы ставим кавычки, так как речь идет не об обыкновенном, а о криволинейном треугольнике). При $k=1$ получаем функцию $y=x$, график превращается в прямую (см. рис. 9), треугольник

становится обыкновенным прямоугольным треугольником и площадь его составляет $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ произведения катетов.

Аналогичные результаты получаются, если исходить из случая $a<b<0$ (криволинейная трапеция расположена слева от Oy). Тогда, оставляя a неизменным, заставляем b стремиться к нулю; при этом выражение $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$ стремится к пределу $-\frac{a^{k+1}}{k+1}$. Это и будет площадь соответствующего криволинейного треугольника.

Криволинейный треугольник можно рассматривать как частный случай криволинейной трапеции. Из того, что мы здесь установили, вытекает, что формула

$$S=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

остается верной и для криволинейного треугольника. Нужно только положить в ней $a=0$ (если треугольник лежит справа от Oy) или $b=0$ (если треугольник лежит слева от Oy).

7. Вернемся к общей задаче изучения площадей криволинейных трапеций. Пусть $ACDB$ — криволинейная трапеция, ограниченная дугой AB графика функции $y=f(x)$, двумя перпендикулярами AC и BD, опущенными из концов дуги на Ox, и отрезком CD прямой Ox, заключенным между основаниями перпендикуляров (рис. 16). Если $OC=a$ и $OD=b$, $a<b$, то площадь $ACDB$ обозначают так:

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Каждая деталь в этом обозначении имеет определенный смысл. Здесь указывается функция $f(x)$, график которой ограничивает с одной стороны криволинейную трапецию, а также числа a и b, определяющие границы криволинейной трапеции слева и справа. Обозначение $(*)$ напоминает и о способе нахождения площади $ACDB$; способ этот, изложенный в пп. 2 и 3, состоит в вычислении суммы площадей прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, и переходе

к пределу. Знак $\int$ представляет удлиненную букву S — начальную букву латинского слова summa — сумма. Буква S пишется необычным образом; это должно напоминать о том, что вычисление площади криволинейной трапеции не ограничивается составлением сумм — нужен еще переход к пределу. Справа от знака $\int$, называемого знаком *интеграла* (от латинского integer — целый, полный), стоит произведение $f(x)dx$. Оно представляет площадь прямоугольника с высотой $f(x)$ и основанием dx. Буква d, стоящая перед x, есть начальная буква латинского слова differentia — разность; dx обозначает разность двух значений x (см. рис. 16): $dx = x' - x$. Число a называется нижним пределом, а b — верхним пределом интеграла (здесь слово «предел» употребляется в смысле «граница»).

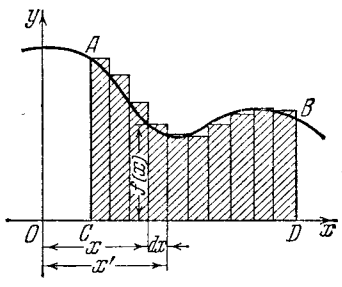

Рис. 16.

Итак, обозначение (*) для площади криволинейной трапеции, во-первых, дает все сведения о форме и размерах ее (об этом говорят числа a и b и функция $f(x)$), а во-вторых, напоминает о способе отыскания площади трапеции, состоящем в вычислении площади прямоугольников с высотами, равными $f(x)$, и основаниями dx, составлении сумм таких площадей и переходе к пределу (об операции составления сумм и перехода к пределу напоминает знак интеграла). Словами запись (*) читается так: «интеграл от a до b эф от x дэ x». Повторяем, что запись эта выражает площадь криволинейной трапеции $ACDB$. Пользуясь новым обозначением, можно представить результаты п. 5 в следующем виде:

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

(k — целое неотрицательное число). Последнее равенство читаем так: «интеграл от a до b от x^k дэ x равен разности между b^{k+1} и a^{k+1}, деленной на $k+1$».

8. Установим несколько простейших свойств интегралов. Очевидно, что площадь $ACDB$, сложенная с площадью $BDD'B'$, дает площадь $ACD'B'$ (рис. 17). Но первая равна $\int_a^b f(x)\,dx$, вторая равна $\int_b^c f(x)\,dx$ и третья $-\int_a^c f(x)\,dx$. Поэтому имеем: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$. Здесь $a < b < c$; если же $a < c < b$ (рис. 18), то получим, записывая, что площадь $ACD'B'$, сложенная с площадью $B'D'DB$, дает площадь $ACDB$:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Вводя понятие интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в п. 7, мы считали, что $a < b$: нижний предел меньше верхнего. Именно поэтому площадь $BDD'B'$, где $OD = b$ и $OD' = c$, при $b < c$ (рис. 17) записывалась в виде $\int_b^c f(x)\,dx$, а при $b > c$ (рис. 18) — в виде $\int_c^b f(x)\,dx$ (каждый раз нижний предел меньше верхнего). В первом случае разность интегралов $\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ была равна $\int_b^c f(x)\,dx$, а во втором случае $-\int_c^b f(x)\,dx$ (мы воспользовались написанными выше равенствами между интегралами). Для того чтобы охватить оба

случая одной и той же формулой, условимся писать, что при $b > c$:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

Иными словами, мы будем допускать теперь и такой

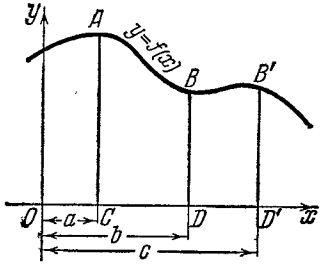

Рис. 17.

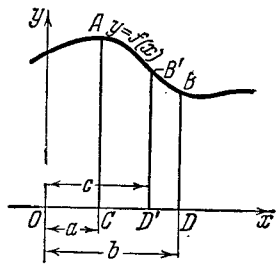

Рис. 18.

интеграл, у которого нижний предел больше верхнего, понимая его как площадь криволинейной трапеции, взятую с противоположным знаком. Тогда вместо двух разных формул:

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \qquad (b < c)$$

или

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx \qquad (b > c)$$

будем писать во всех случаях:

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \qquad (b \neq c).$$

При $b = c$ левая часть обращается в нуль; поэтому естественно рассматривать интеграл $\int_b^b f(x)\,dx$, полагая его равным нулю.

Итак, независимо от того, будет ли $b < c$, $b > c$ или $b = c$, во всех случаях можно пользоваться формулой

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx.$$

Формулу эту можно представить в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Предлагаем читателю проверить с помощью результатов этого пункта, что формула

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

верна для *любых* a и b (а не только для $0 \leqslant a < b$ или $a < b \leqslant 0$).

9. Допустим, что $f(x)$ имеет вид суммы или разности двух функций: $f(x) = g(x) + h(x)$ или $f(x) = g(x) - h(x)$ (например, $f(x) = x^3 - x^5$). Тогда интеграл от $f(x)$ можно заменить суммой или разностью интегралов от функций $g(x)$ и $h(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$$

$$\left(\text{или } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx\right).$$ Например,

$$\int_a^b (x^3 - x^5)\,dx = \int_a^b x^3\,dx - \int_a^b x^5\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Докажем это свойство интегралов, причем ограничимся случаем суммы. Итак, пусть $f(x) = g(x) +$

$+h(x)$; графики трех функций $g(x)$, $h(x)$ и $f(x)$ изображены на рис. 19. Нужно доказать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx,$$

т. е. что площадь $ACDB$ равна сумме площадей $A_1C_1D_1B_1$ и $A_2C_2D_2B_2$. Разобьем отрезок оси Ox между точками $x=a$ и $x=b$ на части и построим соответствующие ступенчатые фигуры для всех трех криволинейных трапеций, изображенных на рис. 19. Очевидно, что площадь каждого прямоугольника в нижней части рисунка равна сумме площадей двух прямоугольников, расположенных над ним в средней и верхней частях рисунка. Поэтому площадь нижней ступенчатой фигуры равна сумме площадей двух вышележащих ступенчатых фигур. Эта связь между площадями ступенчатых фигур будет сохраняться при любом дроблении отрезка оси Ox между $x=a$ и $x=b$. Если дробить этот отрезок на неограниченно возрастающее число частей, длины которых стремятся к нулю, то нижняя площадь будет стремиться к пределу $\int_a^b f(x)\,dx$ и две вышележащие — к пределам

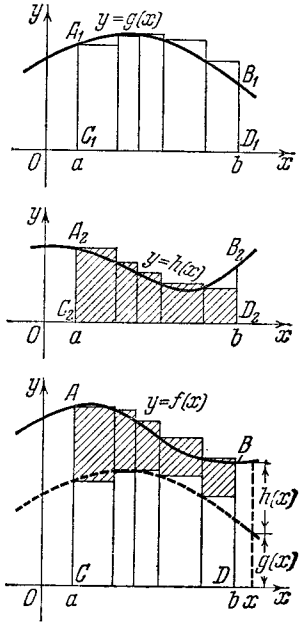

Рис. 19.

$$\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b h(x)\,dx.$$

Так как предел суммы равен сумме пределов, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) + h(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx,$$

что и нужно было доказать.

Точно так же доказывается, что

$$\int_a^b [g(x) - h(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx.$$

Легко видеть, что установленное свойство интегралов справедливо и тогда, когда $f(x)$ есть сумма большего числа слагаемых. Например, если $f(x) = g(x) - h(x) + k(x)$, то

$$\int_a^b [g(x) - h(x) + k(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b [g(x) - h(x)]\,dx + \int_a^b k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx + \int_a^b k(x)\,dx.$$

10. Нам нужно еще выяснить, как связаны друг с другом интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b Cf(x)\,dx,$$

где C — какое-либо число (постоянное); например, как связаны интегралы $\int_a^b x^3\,dx$ и $\int_a^b 2x^3\,dx$. Покажем, что

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx;$$

например,

$$\int_a^b 2x^3\,dx = 2\int_a^b x^3\,dx = 2\,\frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^4 - a^4}{2}.$$

Для простоты рассуждений придадим C какое-либо определенное числовое значение, например, положим $C = \frac{1}{2}$. Теперь речь идет о сравнении интегралов:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{1}{2} f(x)\,dx.$$

На рис. 20 изображены криволинейные трапеции, площади которых представляются этими интегралами.

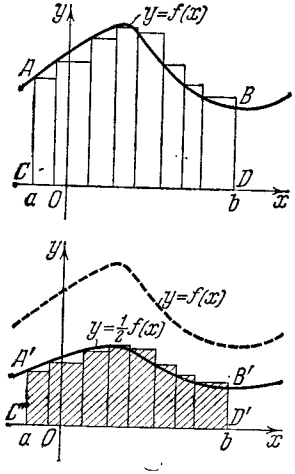

Рис. 20.

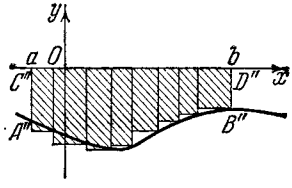

Рис. 21.

Разобьем отрезок оси Ox между точками $x = a$ и $x = b$ на какие-либо части и построим соответствующие ступенчатые фигуры. Легко видеть, что площадь каждого прямоугольника в нижней части рисунка равна половине площади лежащего над ней прямоугольника (из верхней части рисунка). Поэтому площадь нижней ступенчатой фигуры вдвое меньше, чем площадь верхней ступенчатой фигуры. Переходя к пределу (как в п. 9), заключаем, что и вся площадь нижней криволинейной трапеции вдвое меньше площади верхней криволинейной трапеции:

$$\int_a^b \frac{1}{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)\,dx.$$

В этом рассуждении число C было положительным; если взять отрицательное C, например $C = -\frac{1}{2}$, то рис. 20 придется заменить рис. 21.

Сравнивая теперь площадь $ACDB$ с площадью $A''C''D''B''$, мы найдем, что здесь происходит не только изменение абсолютной величины площади (уменьшение ее в два раза), но и перемена знака. Следовательно,

$$\int_a^b \left(-\frac{1}{2}\right) f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Конечно, мы брали $C = \pm\frac{1}{2}$ только для большей ясности. Вообще же при любом C справедливо равенство

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

В качестве примера использования свойств интеграла, выведенных в этом и в предыдущем пунктах, подсчитаем интеграл $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$. Получим:

$$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx - \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 1\,dx =$$

$$= 3\int_0^1 x^2\,dx - 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^0\,dx =$$

$$= 3\,\frac{1^3 - 0^3}{3} - 2\,\frac{1^2 - 0^2}{2} + \frac{1^1 - 0^1}{1} = 3\cdot\frac{1}{3} - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1.$$

11. Рассмотрим функцию

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Ее график называется *равнобочной гиперболой*; он изображен на рис. 22. Если формулу для площади

криволинейной трапеции

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

выведенную выше при $k \geqslant 0$, применить к данному случаю, то, замечая, что $k + 1 = 0$, $b^{k+1} = a^{k+1} = 1$,

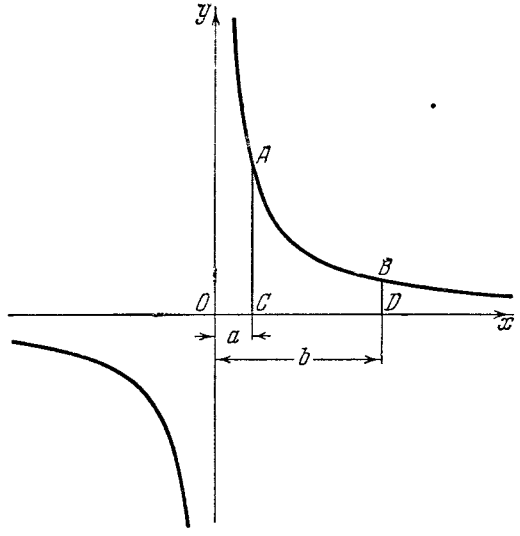

Рис. 22.

получим в правой части не имеющее смысла выражение $\frac{0}{0}$. Следовательно, наша формула не годится при $k = 1$.

Непригодность этой формулы для вычисления интеграла $\int_a^b x^{-1}\,dx$ не помешает нам, однако, изучить некоторые свойства этого интеграла.

Докажем, что если a и b увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, т. е. умножить на одно и то же $q > 0$, то получим новую криволинейную трапецию с *той же самой площадью*. Разумеется, мы собираемся доказывать это свойство, предполагая, что кривая, дугами которой ограничены с одной стороны

наши криволинейные трапеции, есть равнобочная гипербола, а не какая-либо другая кривая. Иными словами,

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx,$$

каково бы ни было q ($q > 0$).

Чтобы легче было следить за доказательством, дадим q определенное числовое значение, например $q = 3$. На рис. 23 изображены две соответствующие криволинейные трапеции $ACDB$ и $A''C'D'B''$. Первая из них у́же, но выше, вторая шире, но ниже. Нужно доказать, что увеличение ширины во втором случае возмещается уменьшением вышины так, что площадь остается неизменной. С этой целью разобьем первую трапецию на другие, более узкие, а каждую из последних заменим прямоугольником (рис. 23). Если увеличить втрое абсциссу каждой точки построенной ступенчатой фигуры $ACDB$, оставляя ординаты неизменными, то получим фигуру $A'C'D'B'$, площадь которой втрое больше, так как каждый прямоугольник стал втрое шире. Но концы ординат не будут лежать теперь на нашей гиперболе. В самом деле, эта гипербола есть график обратной пропорциональности $y = \frac{1}{x}$ и, чтобы точки не сходили с нее, нужно уменьшить ординату во столько же раз, во сколько мы увеличили абсциссу. Если уменьшить все ординаты фигуры $A'C'D'B'$ втрое, то получится фигура $A''C'D'B''$. Это криволинейная трапеция, ограниченная сверху дугой гиперболы $y = \frac{1}{x}$, а с боков — ординатами, проведенными для $x = 3a$ и $x = 3b$. Прямоугольники, полученные при этом, имеют основания, в три раза бо́льшие,

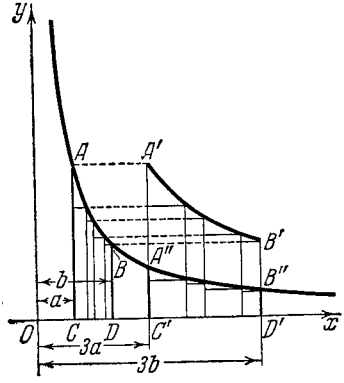

Рис. 23.

чем исходные прямоугольники, а высоты — в три раза меньшие. Поэтому площади их такие же, как у первоначальных прямоугольников. Следовательно, площади двух ступенчатых фигур одинаковы, одинаковы и пределы их, т. е. площади криволинейных трапеций:

$$\int_{qa}^{qb} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx.$$

Мы доказали это свойство, предполагая, что $a < b$, Но оно верно при $a = b$ и при $a > b$. В самом деле, если $a = b$, то и $aq = bq$ и оба интеграла обращаются в нуль, так что равенство не нарушается. Если же $a > b$, то и $aq > bq$; в этом случае будет справедливо равенство

$$\int_{bq}^{aq} x^{-1}\,dx = \int_{b}^{a} x^{-1}\,dx$$

(теперь $b < a$, а поэтому b и a меняются ролями). Но мы условились в п. 8 считать, что $\int_a^b f(x)\,dx$ при $a > b$ обозначает $-\int_b^a f(x)\,dx$. Следовательно:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = -\int_{bq}^{aq} x^{-1}\,dx, \qquad \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx = -\int_{b}^{a} x^{-1}\,dx$$

и, так как правые части этих соотношений равны, то и левые должны быть равны:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx.$$

Итак, доказанное соотношение остается верным независимо от того, будет ли $a < b$, $a = b$ или $a > b$.

12. Положим $a = 1$ и рассмотрим $\int_1^b x^{-1}\,dx$. Если $b > 1$, то интеграл этот представляет площадь криволинейной трапеции $ACDB$ (рис. 24). Если $b = 1$, то он обращается в нуль. Наконец, если $0 < b < 1$, то

нижний предел интеграла меньше верхнего, и мы получаем:

$$\int_1^b x^{-1}\,dx = -\int_b^1 x^{-1}\,dx.$$

Это означает, что интеграл в этом случае отличается лишь знаком от площади криволинейной трапеции $B'D'CA$ (рис. 25). Во всяком случае, для любого положительного числа b интеграл $\int_1^b x^{-1}\,dx$ имеет вполне

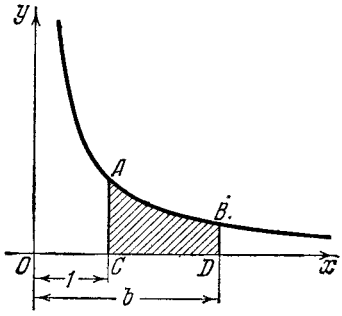

Рис. 24.

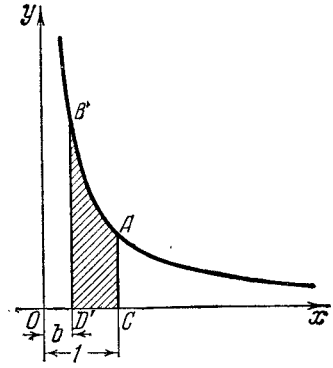

Рис. 25.

определенное значение. Оно положительно, когда $b > 1$, равно нулю, когда $b = 1$, и отрицательно, когда $b < 1$.

Очевидно, что интеграл $\int_1^b x^{-1}\,dx$ является функцией от b. Эта функция играет в математике важную роль; ее называют *натуральным логарифмом* числа b и обозначают так: $\ln b$. Здесь l и n — начальные латинские буквы слов: логарифм (logarithmus) и натуральный (naturalis). Итак,

$$\int_1^b x^{-1}\,dx = \ln b.$$

Отметим некоторые свойства натурального логарифма. Прежде всего, имеем:

$\ln b > 0$, если $b > 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln b < 0$, если $b < 1$.

Выведем далее основное свойство логарифма, заключающееся в том, что *логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей*, например $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$. В общем виде:

$$\ln (bc) = \ln b + \ln c,$$

т. е.

$$\int_1^{bc} x^{-1}\,dx = \int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_1^{c} x^{-1}\,dx.$$

В самом деле, по доказанному выше:

$$\int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_q^{qc} x^{-1}\,dx$$

при любом $q > 0$. Возьмем $q = b$; тогда получим:

$$\int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_b^{bc} x^{-1}\,dx.$$

Поэтому

$$\int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_b^{bc} x^{-1}\,dx;$$

но последнюю сумму, по свойству, выведенному в п. 8, можно заменить интегралом $\int_1^{bc} x^{-1}\,dx$. Итак,

$$\int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_1^{bc} x^{-1}\,dx,$$

что и нужно было доказать.

Из этого свойства можно вывести некоторые следствия. Пусть $b > 0$; тогда по доказанному

$$\ln 1 = \ln \left(b \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$$

и, так как $\ln 1 = 0$, то $\ln b + \ln \frac{1}{b} = 0$, откуда

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b.$$

Например, $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. Далее, если $b>0$ и $c>0$, то

$$\ln\frac{c}{b} = \ln\left(c\,\frac{1}{b}\right) = \ln c + \ln\frac{1}{b} = \ln c - \ln b;$$

иными словами, *логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.*

Основное свойство логарифма было сформулировано нами для произведения двух множителей, но оно справедливо и для произведения любого числа множителей. Так, например, если множителей три, то получаем:

$$\ln(bcd) = \ln[(bc)\,d] = \ln(bc) + \ln d =$$
$$= (\ln b + \ln c) + \ln d = \ln b + \ln c + \ln d.$$

Очевидно, что сколько бы ни было множителей, всегда логарифм их произведения будет равен сумме логарифмов множителей.

Применим это свойство к логарифму степени с целым положительным показателем k. Найдем:

$$\ln b^k = \ln(\underbrace{bb\ldots b}_{k\text{ раз}}) = \underbrace{\ln b + \ln b + \ldots + \ln b}_{k\text{ раз}} = k\ln b.$$

Например, $\ln 16 = \ln 2^4 = 4\ln 2$.

Пусть $c = \sqrt[k]{b}$; тогда $c^k = b$ и, следовательно,

$$\ln b = \ln c^k = k\ln c = k\ln\sqrt[k]{b},$$

откуда

$$\ln\sqrt[k]{b} = \frac{1}{k}\ln b.$$

Например,

$$\ln\sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}\ln 2.$$

Если $c = b^{\frac{p}{q}}$, где p и q — целые положительные числа, то получаем на основании доказанных свойств:

$$\ln b^{\frac{p}{q}} = \ln\sqrt[q]{b^p} = \frac{1}{q}\ln b^p = \frac{1}{q}\cdot p\ln b = \frac{p}{q}\ln b.$$

Следовательно, свойство

$$\ln b^k = k\ln b$$

справедливо не только тогда, когда k — целое положительное число, но и тогда, когда k есть дробь вида $\frac{p}{q}$.

Легко видеть, что то же свойство справедливо и при k отрицательном (целом или дробном). Действи-

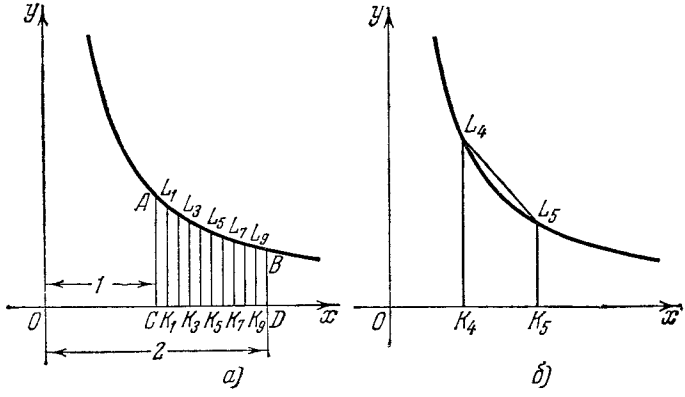

Рис. 26.

тельно, если $k < 0$, то $-k > 0$ и мы имеем:

$$\ln b^k = \ln \frac{1}{b^{-k}} = -\ln b^{-k} = -(-k \ln b) = k \ln b.$$

Наконец, то же свойство справедливо и при $k = 0$:

$$\ln b^0 = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln b.$$

Итак, для любого k рационального (положительного, равного нулю или отрицательного, целого или дробного) можно утверждать, что

$$\ln b^k = k \ln b.$$

Можно было бы доказать, что это соотношение справедливо и при k иррациональном; например,

$$\ln b^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ln b.$$

Мы примем это последнее утверждение без доказательства и будем пользоваться свойством: *натуральный логарифм степени равен показателю степени, умноженному на натуральный логарифм основания степени* — для всех возможных значений показателя k, как рациональных, так и иррациональных.

13. Займемся вычислением логарифмов. Пусть нужно вычислить $\ln 2$, т. е. найти площадь криволи-

нейной трапеции $ACDB$, изображенной на рис. 26, *а*. Разобьем отрезок CD на 10 равных частей и проведем соответствующие ординаты: K_1L_1, K_2L_2, ..., K_9L_9. Чтобы найти возможно лучшее приближение $\ln 2$, заменим каждую из десяти получившихся узких криволинейных трапеций не прямоугольником, как это делалось нами ранее, а обыкновенной, т. е. прямолинейной трапецией. С этой целью соединим точку A с L_1, точку L_1 с L_2 и т. д., ..., L_9 с B прямолинейными отрезками. На рис. 26, *а* обыкновенные трапеции трудно было бы отличить от криволинейных; чтобы лучше видеть их различие, мы даем увеличенный рис. 26, *б*. Площадь каждой трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту; но в нашем случае все высоты одинаковы

$$CK_1 = K_1K_2 = \ldots = K_9D = 0{,}1.$$

Поэтому площади трапеций будут такие:

$$\frac{AC + K_1L_1}{2} \cdot 0{,}1; \quad \frac{K_1L_1 + K_2L_2}{2} \cdot 0{,}1; \ \ldots; \quad \frac{K_9L_9 + BD}{2} \cdot 0{,}1;$$

сумма этих площадей равна:

$$0{,}1\,\frac{(AC + K_1L_1) + (K_1L_1 + K_2L_2) + \ldots + (K_9L_9 + BD)}{2},$$

или

$$0{,}1\,(0{,}5AC + K_1L_1 + K_2L_2 + \ldots + K_9L_9 + 0{,}5BD).$$

Остается заметить, что все основания трапеций являются ординатами графика функции $y = \frac{1}{x}$, соответствующими следующим абсциссам:
1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2.
Поэтому

$$AC = \frac{1}{1} = 1{,}000; \quad K_1L_1 = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}909; \quad K_2L_2 = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}833;$$

$$K_3L_3 = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}769; \quad K_4L_4 = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}714; \quad K_5L_5 = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}667;$$

$$K_6L_6 = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625; \quad K_7L_7 = \frac{1}{1{,}7} = 0{,}588; \quad K_8L_8 = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}556;$$

$$K_9L_9 = \frac{1}{1{,}9} = 0{,}526; \qquad BD = \frac{1}{2} = 0{,}500.$$

Следовательно, сумма площадей трапеций равна:

$$0{,}1\,(0{,}500 + 0{,}909 + 0{,}833 + 0{,}769 + 0{,}714 + 0{,}667 + 0{,}625 + 0{,}588 + 0{,}556 + 0{,}526 + 0{,}250) = 0{,}6937.$$

Если приглядеться к рис. 26, то станет ясно, что сумма площадей этих трапеций дает величину, несколько бóльшую, чем площадь криволинейной трапеции. Это означает, что мы нашли приближенное значение $\ln 2$ с избытком, т. е. что $\ln 2$ несколько меньше, чем 0,6937.

Мы познакомимся ниже с другим способом вычисления логарифмов, который позволит, в частности, получить $\ln 2$ с большой степенью точности.

14. Если отсчитывать абсциссы не от точки O, а от точки C (рис. 27), и обозначить новые абсциссы буквой t, то связь между новой и старой абсциссой одной и той же точки будет такая:

$$x = 1 + t.$$

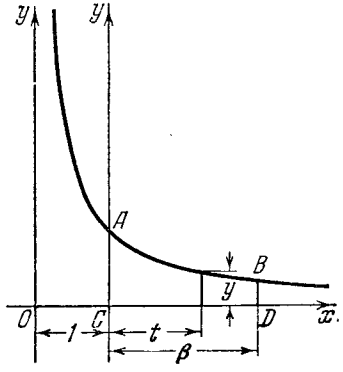

Рис. 27.

Связь эта будет справедлива для любой точки, если считать $t > 0$, когда $x > 1$, и $t \leqslant 0$, когда $x \leqslant 1$. При замене x на $1 + t$ функция $y = \frac{1}{x}$ примет иной вид: $y = \frac{1}{1+t}$, но график ее останется прежним. Все новое, что вводится вместе с t, сводится лишь к новому началу координат (C вместо O), а следовательно, к новой оси Cy (параллельной прежней); кривая же не изменяется. Не меняется, конечно, и площадь $ACDB$. Но когда абсциссой мы считали x, эта площадь изображалась интегралом

$$\int_1^{1+\beta} x^{-1}\,dx = \ln(1+\beta)$$

(здесь $\beta = CD$).

Теперь же, когда абсциссой считается t, та же площадь изображается интегралом $\int_0^{\beta} (1+t)^{-1}\,dt$. Срав-

нивая оба интеграла, получаем:

$$\ln(1+\beta)=\int_0^{\beta}(1+t)^{-1}\,dt.$$

Заметим теперь следующее тождество:

$$1-t+t^2-t^3+\ \ldots\ -t^{2n-1}=\frac{1-t^{2n}}{1+t}.$$

Оно получается немедленно, если заметить, что в левой части находится геометрическая прогрессия с первым членом 1, знаменателем $-t$ и последним членом $-t^{2n-1}$. Из этого тождества следует, что

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ \ldots\ -t^{2n-1}+\frac{t^{2n}}{1+t}.$$

Поэтому

$$\ln(1+\beta)=\int_0^{\beta}\left[1-t+t^2-t^3+\ \ldots\ -t^{2n-1}+\frac{t^{2n}}{1+t}\right]dt.$$

Теперь под знаком интеграла вместо $(1+t)^{-1}$ стоит более сложное и громоздкое выражение — сумма многих слагаемых. Мы знаем уже, что интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов этих функций. Следовательно,

$$\ln(1+\beta)=\int_0^{\beta}1\,dt-\int_0^{\beta}t\,dt+\int_0^{\beta}t^2\,dt-\int_0^{\beta}t^3\,dt+\ \ldots$$

$$\ldots-\int_0^{\beta}t^{2n-1}\,dt+\int_0^{\beta}\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

Каждый из интегралов в правой части, кроме последнего интеграла, мы умеем вычислять. А именно:

$$\int_0^{\beta}1\,dt=\beta,\quad \int_0^{\beta}t\,dt=\frac{\beta^2}{2},\quad \int_0^{\beta}t^2\,dt=\frac{\beta^3}{3},$$

$$\int_0^{\beta}t^3\,dt=\frac{\beta^4}{4},\ \ldots,\quad \int_0^{\beta}t^{2n-1}\,dt=\frac{\beta^{2n}}{2n}.$$

Отсюда следует, что

$$\ln(1+\beta)=\left(\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}\right)+$$

$$+\int_0^{\beta}\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

Выражение в круглых скобках в правой части равенства есть многочлен степени $2n$, расположенный по возрастающим степеням β. Если значение β известно и, кроме того, если выбрано целое положительное число n (его можно брать любым), то значение этого многочлена легко вычислить. Затрудняет лишь подсчет интеграла $\int_0^{\beta}\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$.

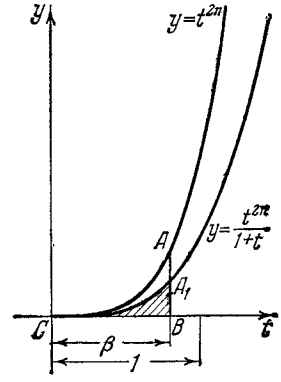

Рис. 28.

Мы докажем сейчас, что при $-1<\beta\leqslant 1$ его можно сделать как угодно малым, если взять n достаточно большим. Если это так, то, вычисляя $\ln(1+\beta)$, можно совсем отбросить последний интеграл, вызвав этим лишь незначительную ошибку. Приближенно, следовательно, будем иметь:

$$\ln(1+\beta)\approx\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}.$$

15. Чтобы оценить ошибку этого приближенного равенства, нужно рассмотреть отбрасываемый интеграл $\int_0^{\beta}\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$. Предположим сначала, что $0\leqslant\beta\leqslant 1$. Тогда t в пределах интегрирования остается положительным и, следовательно,

$$0<\frac{t^{2n}}{1+t}<t^{2n}.$$

Это означает, что график функции $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$ лежит ниже графика функции $y = t^{2n}$ (рис. 28); поэтому площадь CBA_1 меньше площади CBA, т. е.

$$\int_0^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt < \int_0^{\beta} t^{2n}\,dt = \frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}.$$

Итак, ошибка выведенного нами приближенного равенства меньше, чем $\frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}$; так как $0 < \beta \leqslant 1$, то эта ошибка может быть сделана сколь угодно малой, когда n достаточно велико. Возьмем, например, $\beta = 1$; тогда выведенная выше формула даст:

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

с ошибкой, меньшей чем $\frac{1}{2n+1}$. Если мы захотим подсчитать этим способом $\ln 2$ с точностью до 0,001, то придется потребовать, чтобы было $\frac{1}{2n+1} < 0{,}001$, т. е. $2n+1 > 1000$; такому условию можно удовлетворить, положив $2n = 1000$. Но это означает, что в левой части равенства появится 1000 членов, сумму которых нужно найти. Такая работа, конечно, непомерно велика; мы увидим вскоре, как ее можно избежать, пользуясь другой формулой для $\ln 2$.

16. Обратимся снова к интегралу $\int_0^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$, но положим теперь, что $-1 < \beta < 0$. Мы знаем, что

$$\int_0^{\beta} \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} = -\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}.$$

Интеграл $\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ равен площади фигуры $ABCK$, заштрихованной на рис. 29. Фигура эта расположена

сверху от Ct, так как $y=\frac{t^{2n}}{1+t}>0$ при $t>-1$. Поэтому площадь $ABCK$ есть положительное число, т. е. интеграл $\int\limits_{\beta}^{0}\frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ есть положительное число. Оно отличается лишь знаком от интеграла $\int\limits_{0}^{\beta}\frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ и, следовательно, равно абсолютной величине последнего:

$$\int\limits_{\beta}^{0}\frac{t^{2n}\,dt}{1+t}=\left|\int\limits_{0}^{\beta}\frac{t^{2n}\,dt}{1+t}\right|.$$

Заметим далее, что при $t>\beta$ и $\beta>-1$ выполняется неравенство

$$1+t>1+\beta>0,$$

следовательно,

$$\frac{1}{1+t}<\frac{1}{1+\beta}$$

и

$$\frac{t^{2n}}{1+t}<\frac{t^{2n}}{1+\beta}.$$

Это означает, что график функции $y=\frac{t^{2n}}{1+t}$ лежит ниже графика функции $y=\frac{t^{2n}}{1+\beta}$ на участке $\beta<t<0$ (рис. 29). Поэтому площадь $ABCK$ меньше площади $ABCL$:

$$\int\limits_{\beta}^{0}\frac{t^{2n}\,dt}{1+t}<\int\limits_{\beta}^{0}\frac{t^{2n}\,dt}{1+\beta}.$$

Правую часть неравенства легко вычислить:

$$\int\limits_{\beta}^{0}\frac{1}{1+\beta}t^{2n}\,dt=\frac{1}{1+\beta}\int\limits_{\beta}^{0}t^{2n}\,dt=$$

$$=\frac{1}{1+\beta}\,\frac{0^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{2n+1}=-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$$

(это — положительное число, так как $\beta^{2n+1}<0$, $1+\beta>0$ и $2n+1>0$). Следовательно,

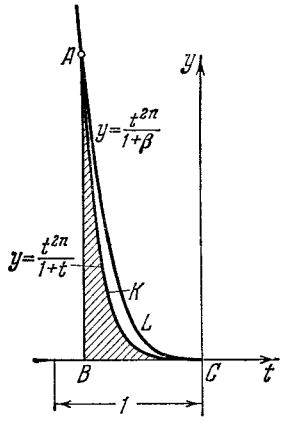

Рис. 29.

$$\left|\int_0^{\beta}\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt\right| = \int_{\beta}^{0}\frac{t^{2n}\,dt}{1+t} < -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}.$$

Поэтому, отбрасывая в выражении для $\ln(1+\beta)$ слагаемое $\int_0^{\beta}\frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$, мы делаем ошибку, меньшую по абсолютной величине, чем $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$ $(-1<\beta<0)$. Она стремится к нулю при n, неограниченно возрастающем.

Итак, приближенная формула

$$\ln(1+\beta)\approx\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}$$

при $-1<\beta<0$ верна с точностью до $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$.

Положим, например, $\beta=-\frac{1}{2}$; тогда ошибка приближенной формулы будет меньше, чем

$$\frac{1}{2^{2n+1}}:\left[\frac{1}{2}(2n+1)\right]=\frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}.$$

Если взять $n=4$, то последняя дробь будет равна $\frac{1}{9\cdot 2^8}=\frac{1}{9\cdot 256}=\frac{1}{2304}<0{,}0005$. Следовательно, с такой степенью точности можно писать:

$$\ln\frac{1}{2}\approx-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2^4\cdot 4}-\frac{1}{2^5\cdot 5}-$$
$$-\frac{1}{2^6\cdot 6}-\frac{1}{2^7\cdot 7}-\frac{1}{2^8\cdot 8}.$$

Производим вычисления:

$$\frac{1}{2}=0{,}5000;\quad \frac{1}{2^2\cdot 2}=0{,}1250;\quad \frac{1}{2^3\cdot 3}=0{,}0417;\quad \frac{1}{2^4\cdot 4}=0{,}0156;$$

$$\frac{1}{2^5\cdot 5}=0{,}0062;\quad \frac{1}{2^6\cdot 6}=0{,}0026;\quad \frac{1}{2^7\cdot 7}=0{,}0011;\quad \frac{1}{2^8\cdot 8}=0{,}0005.$$

Получаем

$$\ln\frac{1}{2}\approx -0{,}6927\approx -0{,}693$$

с точностью до 0,001 (мы учитываем, что сама формула могла содержать ошибку до 0,0005, да еще при обращении каждого из восьми слагаемых в десятичную дробь могла возникнуть ошибка до 0,00005).

Так как $\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$, то отсюда следует, что

$$\ln 2\approx 0{,}693.$$

Если в приближенной формуле для $\ln(1+\beta)$ положить $\beta=-\frac{2}{3}$, то можно вычислить таким же образом $\ln\frac{1}{3}$, а следовательно, и $\ln 3=-\ln\frac{1}{3}$. Вообще, если взять $\beta=-\frac{k}{k+1}$, то получим $\ln\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=$ $=\ln\frac{1}{k+1}$, а следовательно, и $\ln(k+1)=-\ln\frac{1}{k+1}$. Однако такой способ вычисления логарифмов все еще будет громоздким. Так, например, если мы захотим вычислить $\ln 11$, то, беря $k+1=11$, т. е. $k=10$, мы должны положить $\beta=-\frac{10}{11}$. Тогда ошибка приближенной формулы будет меньше, чем

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}:(2n+1)\left(1-\frac{10}{11}\right)=\frac{11}{2n+1}\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}.$$

Имеем:

$$\frac{10}{11}\approx 0{,}91;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^2\approx 0{,}83;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^4\approx 0{,}69;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^8\approx 0{,}48;$$

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{16}\approx 0{,}29;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{32}\approx 0{,}08;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{64}\approx 0{,}006;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{65}\approx 0{,}005.$$

Следовательно, только беря $2n + 1 = 65$, мы можем гарантировать, что ошибка приближенной формулы для вычисления $\ln \frac{1}{11}$ будет меньше $\frac{11}{65} \cdot 0{,}005 \approx 0{,}001$.

Очевидно, что вычислительная работа для отыскания $\ln \frac{1}{11}$ здесь будет очень большой, так как придется вычислять сумму 64 слагаемых:

$$-\frac{10}{11} - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{11}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{10}{11}\right)^3 - \ldots - \frac{1}{64}\left(\frac{10}{11}\right)^{64}.$$

17. Выводы, к которым мы пришли относительно приближенной формулы для $\ln(1+\beta)$, заставляют искать другую формулу, требующую меньших выкладок. Такая формула действительно существует. Чтобы получить ее, возьмем какое-либо целое положительное число k и положим $\beta = \frac{1}{2k+1}$. Тогда найдем:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) \approx \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)^2} + \frac{1}{3(2k+1)^3} - \\ - \frac{1}{4(2k+1)^4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}} - \frac{1}{2n(2k+1)^{2n}}.$$

Ошибка этого приближенного равенства меньше, чем $\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}$. Возьмем теперь отрицательное β, равное $-\frac{1}{2k+1}$; получим другое приближенное равенство

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) \approx -\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)^2} - \frac{1}{3(2k+1)^3} - \\ - \frac{1}{4(2k+1)^4} - \ldots - \frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}} - \frac{1}{2n(2k+1)^{2n}},$$

дающее $\ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$ с ошибкой, меньшей, чем

$$\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} : \left[(2n+1)\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)\right] = \\ = \frac{2k+1}{2k} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Вычтем почленно второе приближенное равенство из первого. Найдем:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\approx$$
$$\approx\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+\frac{2}{5(2k+1)^5}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}.$$

Ошибка этого приближенного равенства не превосходит по абсолютной величине суммы ошибок, допускаемых в формулах для $\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$ и $\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)$; поэтому она меньше, чем

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}+\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=$$
$$=\frac{4k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}<$$
$$<\frac{4k+2}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=\frac{1}{k(2n+1)(2k+1)^{2n}}.$$

Преобразуем разность логарифмов, заметив, что она должна совпадать с логарифмом частного. Получаем:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)=\ln\frac{1+\frac{1}{2k+1}}{1-\frac{1}{2k+1}}=$$
$$=\ln\frac{2k+2}{2k}=\ln\frac{k+1}{k}=\ln(k+1)-\ln k.$$

Итак,

$$\ln(k+1)-\ln k\approx\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+\frac{2}{5(2k+1)^5}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}\qquad(*)$$

с ошибкой, меньшей, чем $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n}}$.

Это и есть нужная формула. Она позволяет вычислять $\ln(k+1)$, если $\ln k$ уже известен. Воспользовав-

шись тем, что $\ln 1 = 0$, и положив в ней $k = 1$, мы найдем $\ln 2$ с ошибкой, меньшей, чем

$$\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{3^{2n}}.$$

Возьмем $n = 5$; тогда можно утверждать, что ошибка будет меньше, чем $\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{11\cdot 59049} < 0{,}000002$. Следовательно,

$$\ln 2 = \ln 2 - \ln 1 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} + \frac{2}{9\cdot 3^9}$$

с ошибкой, меньшей, чем 0,000002. Обращая каждую из пяти дробей в десятичную с шестью знаками после запятой (т. е. с точностью до 0,0000005) и складывая, получим значение $\ln 2$ с точностью до $0{,}000002 + 0{,}0000005\cdot 5 < 0{,}000005$:

$$\ln 2 \approx 0{,}693146 \approx 0{,}69315.$$

Положим теперь в формуле (*) $k = 2$ и $n = 3$; получим

$$\ln 3 - \ln 2 \approx \frac{2}{5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} \approx 0{,}40546$$

с ошибкой, меньшей, чем $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^6} = \frac{1}{14\cdot 15625} < 0{,}000005$. Поэтому

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 0{,}40546 \approx 1{,}09861.$$

Далее получим $\ln 4 = 2\ln 2 \approx 1{,}38630$; беря в формуле (*) $k = 4$ и $n = 3$, находим:

$$\ln 5 - \ln 4 \approx \frac{2}{9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} \approx 0{,}223144 \approx 0{,}22314$$

с ошибкой, меньшей, чем

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^5} = \frac{1}{28\cdot 531441} < 0{,}0000001.$$

Поэтому

$$\ln 5 \approx \ln 4 + 0{,}22314 \approx 1{,}60944.$$

Теперь можно найти и $\ln 10$:

$$\ln 10 = \ln 5 + \ln 2 \approx 2{,}30259.$$

Наконец, беря в формуле (*) $k=10$ и $n=2$, получаем:

$$\ln 11 - \ln 10 \approx \frac{2}{21} + \frac{2}{3\cdot 21^3} \approx 0{,}09531$$

(ошибка приближенной формулы здесь меньше, чем $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{21^4} \approx 0{,}0000001$).

Поэтому

$$\ln 11 \approx \ln 10 + 0{,}09531 \approx 2{,}39790.$$

Этих примеров достаточно, чтобы понять, как можно построить таблицу натуральных логарифмов. Именно таким путем можно получить следующую табличку логарифмов целых чисел от 1 до 100, вычисленных с точностью до 0,0005.

Таблица натуральных логарифмов (от 1 до 100)

n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,000	21	3,045	41	3,714	61	4,111	81	4,394
2	0,693	22	3,091	42	3,738	62	4,127	82	4,407
3	1,099	23	3,135	43	3,761	63	4,143	83	4,419
4	1,386	24	3,178	44	3,784	64	4,159	84	4,431
5	1,609	25	3,219	45	3,807	65	4,174	85	4,443
6	1,792	26	3,258	46	3,829	66	4,190	86	4,454
7	1,946	27	3,296	47	3,850	67	4,205	87	4,466
8	2,079	28	3,332	48	3,871	68	4,220	88	4,477
9	2,197	29	3,367	49	3,892	69	4,234	89	4,489
10	2,303	30	3,401	50	3,912	70	4,248	90	4,500
11	2,398	31	3,434	51	3,932	71	4,263	91	4,511
12	2,485	32	3,466	52	3,951	72	4,277	92	4,522
13	2,565	33	3,497	53	3,970	73	4,290	93	4,533
14	2,639	34	3,526	54	3,989	74	4,304	94	4,543
15	2,708	35	3,555	55	4,007	75	4,317	95	4,554
16	2,773	36	3,584	56	4,025	76	4,331	96	4,564
17	2,833	37	3,611	57	4,043	77	4,344	97	4,575
18	2,890	38	3,638	58	4,060	78	4,357	98	4,585
19	2,944	39	3,664	59	4,078	79	4,369	99	4,595
20	2,996	40	3,689	60	4,094	80	4,382	100	4,605

18. Мы видели, что логарифм произведения находится посредством сложения, логарифм частного — вычитания, логарифм степени — умножения (на пока-

затель степени) и логарифм корня — деления (на показатель корня). Поэтому, если иметь таблицу, в которой рядом с числами выписаны их логарифмы (таблица логарифмов), то с ее помощью действие умножения можно заменять сложением, деление — вычитанием, возведение в степень — умножением и извлечение корня — делением, т. е. каждый раз более простыми действиями. Как это делается, об этом подробно говорится в учебнике алгебры для восьмого класса. Здесь мы ограничимся простым примером.

Пусть нужно вычислить $c = \sqrt[5]{2}$. Воспользуемся вычисленным выше значением $\ln 2 \approx 0{,}693$; разделив его на 5, получим: $\ln \sqrt[5]{2} = \frac{1}{5} \ln 2 \approx 0{,}139$. Остается найти число $\sqrt[5]{2}$ по его логарифму. Наша таблица недостаточно удобна для этой цели; в ней содержатся логарифмы 0,000 (соответствующий числу 1) и 0,693 (соответствующий числу 2); первый слишком мал, второй слишком велик. На основании этого можно сказать только, что $1 < \sqrt[5]{2} < 2$. Но можно заметить, что $\ln\left(10\sqrt[5]{2}\right) = \ln 10 + \ln \sqrt[5]{2} = 2{,}303 + 0{,}139 = 2{,}442$. В нашей таблице ближайший меньший логарифм 2,398 ($=\ln 11$), ближайший больший 2,485 ($=\ln 12$), поэтому $11 < 10\sqrt[5]{2} < 12$. Замечая, что 2,442 лежит приблизительно посредине между $\ln 11$ и $\ln 12$ (среднее арифметическое последних чисел есть 2,441), можно положить $10\sqrt[5]{2} \approx 11{,}5$, т. е. $\sqrt[5]{2} \approx 1{,}15$. Для проверки заметим, что

$$\ln\left(100\sqrt[5]{2}\right) = \ln 100 + \ln \sqrt[5]{2} = 4{,}605 + 0{,}139 = 4{,}744$$

и

$$\ln 115 = \ln 5 + \ln 23 = 1{,}609 + 3{,}135 = 4{,}744.$$

19. Чтобы построить график функции $y = \ln x$, нужно выбрать оси координат и какую-либо единицу масштаба и затем для каждого $x\,(x > 0)$ откладывать величину $\ln x$ на перпендикуляре к Ox, восставленном в соответствующей точке этой оси. Концы перпендикуляров, получаемых для всевозможных x, рас-

положатся на кривой, являющейся графиком натурального логарифма. График логарифма изображен на рис. 30, *а*. Под ним для сравнения приведен рис. 30, *б*, где $\ln x$ изображается площадью. На обоих рисунках принят один и тот же масштаб. Беря одно и то же значение x, можно утверждать, что площадь криволинейной трапеции $ACDB$ на рис. 30, *б* содержит столько же квадратных единиц, сколько единиц длины содержит отрезок KL на рис. 30, *а*.

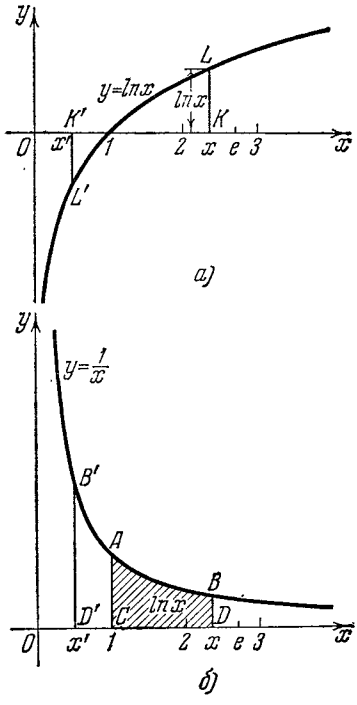

Рис. 30.

$$\ln x' = \int_1^{x'} \frac{dx}{x} = -\int_{x'}^{1} \frac{dx}{x},$$

т. е. $\ln x'$ есть отрицательное число, абсолютная величина которого равна площади трапеции $B'D'CA$; поэтому $\ln x'$ для этого случая изобразится на рис. 30, *а* отрезком $K'L'$, отложенным вниз от оси Ox.

Все свойства графика функции $y = \ln x$ вытекают из определения и свойств натурального логарифма. Например, $\ln x$ отрицателен при $x < 1$, обращается в нуль при $x = 1$ и положителен при $x > 1$. Поэтому график логарифма расположен ниже Ox при $x < 1$, пересекает Ox при $x = 1$ и находится выше Ox при $x > 1$. Далее, $y = \ln x$ возрастает по мере того, как возрастает x. Это свойство очевидно, когда $x > 1$ (см. рис. 30, *б*), но оно верно и при $x = x' < 1$. В самом деле, если x' растет, оставаясь меньше единицы, то абсолютная величина площади $B'D'CA$ (рис. 30, *б*) убывает, а это означает, что $\ln x$, отличающийся только знаком от этой площади, растет.

На графике свойство возрастания логарифма выражается тем, что кривая имеет вид склона холма, подымающегося слева направо. Этот склон, вначале крутой, становится потом все более и более пологим. Для большей наглядности будем называть здесь график логарифма логарифмическим склоном.

Если проложить горизонтальную тропу вдоль Ox и идти по ней, отправляясь от точки O вправо, то вначале мы будем видеть, смотря вниз, бесконечную пропасть, в глубине которой теряется логарифмический склон. Однако достаточно сделать один шаг, равный единице длины, чтобы пропасть осталась позадн. Двигаясь далее по нашей тропе, мы заметим, что с каждым шагом склон будет становиться все выше. Так, после двух шагов ($x = 2$) высота его будет $\ln 2 = 0{,}693$, после трех — $\ln 3 = 1{,}099$ и т. д. Подсчитаем, насколько повысится склон, когда мы после m шагов сделаем еще один. Так как после m шагов (по единице каждый) высота склона будет $\ln m$, а после $m + 1$ шагов — $\ln(m + 1)$, то повышение склона, приходящееся на один шаг, будет:

$$\ln(m+1) - \ln m = \ln\frac{m+1}{m} = \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Чем больше шагов мы сделаем, тем меньше будет $\frac{1}{m}$, тем ближе $1 + \frac{1}{m}$ к единице и тем ближе $\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ к нулю. Это означает, что повышение склона делается все менее и менее заметным по мере того, как мы передвигаемся вправо, т. е. логарифмический склон действительно становится все более пологим.

Пологость склона не мешает ему, однако, неограниченно подыматься вверх, так что, когда мы зайдем вдоль нашей горизонтальной тропы достаточно далеко, склон будет сколь угодно высоко вздыматься над нами.

В самом деле, после 2^m шагов высота склона будет равна

$$\ln 2^m = m \ln 2 = 0{,}693m,$$

а это число при достаточно большом m будет сколь угодно большим.

Если вместо горизонтальной тропы проложить другую прямолинейную тропу с некоторым, хотя бы и очень слабым подъемом вверх (рис. 31, *а*), то, поднимаясь по ней, мы рано или поздно не только обязательно доберемся до логарифмического склона, но

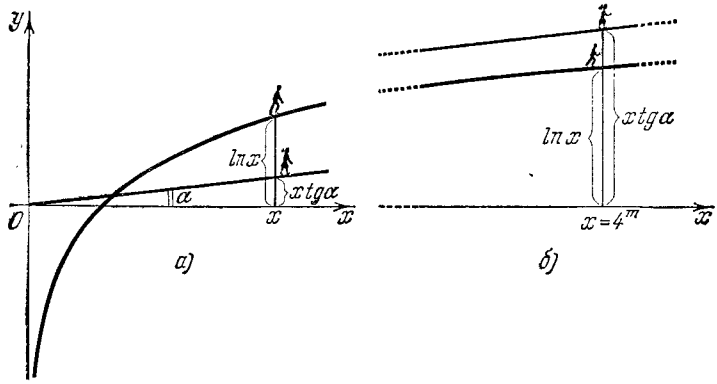

Рис. 31.

при дальнейшем подъеме оставим его внизу под собой (рис. 31, *б*).

Чтобы проверить это, докажем следующую лемму: при любом натуральном m справедливо неравенство

$$\frac{4^m}{m^2} \geqslant 4.$$

Действительно, при увеличении m на 1 дробь $\frac{4^m}{m^2}$ возрастает, т. е.

$$\frac{4^m}{m^2} < \frac{4^{m+1}}{(m+1)^2};$$

это следует из неравенства

$$\frac{4^{m+1}}{(m+1)^2} : \frac{4^m}{m^2} = \frac{4m^2}{(m+1)^2} = \left(\frac{2m}{m+1}\right)^2 = \left(\frac{m+m}{m+1}\right)^2 \geqslant 1,$$

верного при $m \geqslant 1$. Поэтому среди дробей

$$\frac{4^1}{1^2}, \quad \frac{4^2}{2^2}, \quad \ldots, \quad \frac{4^m}{m^2}, \quad \ldots$$

первая имеет наименьшее значение, т. е. всегда

$$\frac{4^1}{1^2} \leqslant \frac{4^m}{m^2},$$

а это мы и хотели доказать.

Заметим теперь, что для каждой точки наклонной прямолинейной тропы выполняется соотношение

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть угол наклона тропы (α — острый угол и, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha > 0$). Если взять $x = 4^m$, то

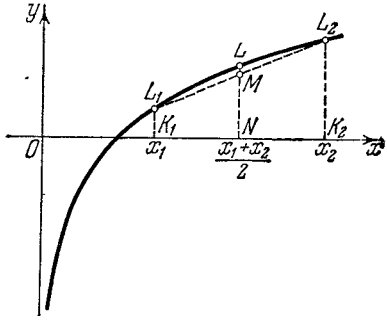

Рис. 32.

высота тропы для этого x будет $4^m \operatorname{tg} \alpha$, а высота логарифмического склона будет $\ln(4^m) = m \ln 4$. Отношение первой высоты ко второй равно

$$\frac{4^m \operatorname{tg} \alpha}{m \ln 4} = \frac{4^m \operatorname{tg} \alpha}{m^2 \ln 4}\, m.$$

Но по доказанному выше $\frac{4^m}{m^2} \geqslant 4$, поэтому отношение высоты тропы к высоте логарифмического склона не меньше, чем $\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\ln 4} m$, что при достаточно большом m может быть сделано сколь угодно большим. Следовательно, при $x = 4^m$ и m большом наклонная прямолинейная тропа будет значительно выше логарифмического склона (см. рис. 31, *б*).

Замечательно, что логарифмический склон имеет округлую форму без всяких выбоин, всюду выпуклую кверху. Это свойство можно выразить геометрически:

любая дуга графика логарифма лежит выше хорды этой дуги (рис. 32). Обозначая абсциссы концов произвольной дуги L_1L_2 через x_1 и x_2, мы проверим, что для среднего значения $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ точка дуги L действительно должна лежать выше соответствующей (средней) точки хорды M.

В самом деле,

$$NL=\ln\frac{x_1+x_2}{2},$$

а

$$NM=\frac{K_1L_1+K_2L_2}{2}$$

(как средняя линия трапеции), т. е.

$$NM=\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}.$$

Нам нужно доказать, что

$$\ln\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}.$$

Но

$$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}=\frac{1}{2}\ln(x_1x_2)=\ln\sqrt{x_1x_2}.$$

Поэтому нужно доказать, что

$$\ln\frac{x_1+x_2}{2}>\ln\sqrt{x_1x_2}.$$

Заметим, что

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2=x_1-2\sqrt{x_1x_2}+x_2>0$$

(если x_1 и x_2 — не равные между собою положительные числа). Поэтому

$$x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2},$$

далее,

$$\frac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1x_2}$$

и, наконец,

$$\ln\frac{x_1+x_2}{2}>\ln\sqrt{x_1x_2},$$

что и требовалось доказать.

Итак, какова бы ни была дуга графика логарифма, точка дуги, соответствующая среднему арифметиче-

скому абсцисс концов, лежит выше середины хорды. Отсюда и вытекает, что на графике логарифма не должно быть выбоин.

Действительно, если бы такая выбоина была (рис. 33), то тогда нашлась бы дуга, для которой указанное свойство нарушалось бы (середина хорды M

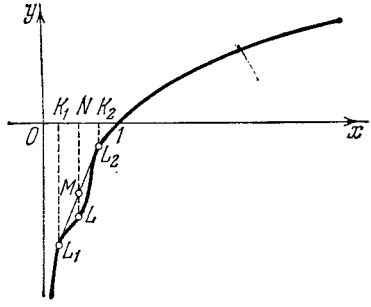

Рис. 33.

лежала бы не ниже, а выше соответствующей точки дуги L).

Опираясь на свойства логарифма, можно было бы вывести еще и другие интересные свойства графика логарифма, но мы ограничимся указанными.

20. Натуральные логарифмы появляются при решении многих вопросов математики и физики, не имеющих на первый взгляд никакого отношения к площадям криволинейных трапеций, ограниченных дугами гиперболы. Вот один из вопросов такого рода, которым занимался знаменитый русский математик Пафнутий Львович Чебышев: найти возможно более простую формулу для приближенного подсчета количества всех простых чисел, не превосходящих данного (какого угодно) числа n.

Если n невелико, то вопрос об этом количестве — оно обозначается знаком $\pi(n)$ (здесь π не имеет никакого отношения к известному числу 3,14159...) — решается чрезвычайно просто. Так, если $n = 10$, то простые числа, не бо́льшие 10, таковы: 2, 3, 5, 7; их количество равно 4, следовательно, $\pi(10) = 4$. Если $n = 100$, то, пользуясь известным приемом эратосфенова решета, получаем 25 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11,

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; следовательно, $\pi(100) = 25$. Однако если n велико, то задача становится весьма трудной. Как подсчитывать $\pi(n)$, хотя бы и очень ориентировочно, когда n равно миллиону, биллиону и т. д.?

Чебышев нашел, что для приближенного вычисления $\pi(n)$ достаточно разделить n на натуральный логарифм n:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n};$$

относительная ошибка этого равенства (ошибка, измеряемая в долях числа $\pi(n)$) может быть большой, но она стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Приближенная формула Чебышева становится особенно удобной в случае, если n есть степень 10 с целым положительным показателем: $n = 10^k$. Тогда получаем $\ln n = \ln 10^k = k \ln 10 \approx 2{,}303\, k$ и, следовательно,

$$\pi(10^k) \approx \frac{10^k}{2{,}303k}.$$

Замечая, что $\frac{1}{2{,}303} \approx 0{,}434$, получаем формулу, еще более удобную для вычислений:

$$\pi(10^k) \approx 0{,}434\,\frac{10^k}{k}.$$

Так, при $k = 1$ и $k = 2$ находим:

$\pi(10) \approx 0{,}434 \cdot 10 = 4{,}34$ (правильный результат 4),

$\pi(100) \approx 0{,}434 \cdot \frac{100}{2} \approx 21{,}7$ (правильный результат 25).

Идя дальше, мы получили бы следующее:

$\pi(1000) \approx 0{,}434 \cdot \frac{1000}{3} \approx 145$ (правильный результат 168),

$\pi(10\,000) \approx 0{,}434 \cdot \frac{10\,000}{4} \approx 1090$ (правильный результат 1229),

$\pi(10^6) \approx 0{,}434 \cdot \frac{10^6}{6} \approx 72\,300$ (правильный результат 78 498).

Относительная ошибка последнего результата составляет

$$\frac{78\,498 - 72\,300}{78\,498} \approx 0{,}08,$$

т. е. 8%; она еще очень значительна. Однако можно совершенно строго доказать, что относительная ошибка формулы Чебышева может быть сделана сколь угодно малой, если только 10^k достаточно велико. Наступит момент, когда она будет менее 1%, далее, менее 0,1%, менее 0,001% и т. д. Этим определяется большое теоретическое значение формулы Чебышева.

П. Л. Чебышев дал еще и другую формулу для приближенного вычисления $\pi(n)$, несколько более сложную, но зато дающую гораздо лучшее приближение. Вот эта формула:

$$\pi(n) \approx \int_2^n \frac{dt}{\ln t}.$$

Не производя вычислений, укажем здесь только некоторые результаты:

$$\int_2^{1000} \frac{dt}{\ln t} \approx 177 \qquad (\pi(1000) = 168);$$

$$\int_2^{10\,000} \frac{dt}{\ln t} \approx 1245 \qquad (\pi(10\,000) = 1229),$$

$$\int_2^{1\,000\,000} \frac{dt}{\ln t} \approx 78\,627 \quad (\pi(1\,000\,000) = 78\,498).$$

Относительная ошибка приближенного равенства

$$\pi(1\,000\,000) \approx \int_2^{1\,000\,000} \frac{dt}{\ln t},$$

следовательно, такова:

$$\frac{|78\,498 - 78\,627|}{78\,498} \approx 0{,}0016,$$

т. е. 0,16%.

21. Мы видели, что

$$\ln 2 = 0{,}69315 < 1, \quad \text{а} \quad \ln 3 = 1{,}09861 > 1.$$

Это означает, что площадь $ACDB$ (рис. 34) меньше 1, а площадь ACD_1B_1 больше 1. Следует ожидать, что где-то между точками D и D_1 найдется такая точка D', что площадь $ACD'B'$ будет равна 1. Такая точка D' действительно существует. Если обозначить OD' буквой e, то можно утверждать, что $2 < e < 3$. Воспользовавшись приведенной на стр. 43 табличкой логарифмов, можно установить, что $2{,}7 < e < 2{,}8$. Действительно,

$\ln 2{,}7 = \ln 27 - \ln 10 \approx 0{,}993$,

а

$\ln 2{,}8 = \ln 28 - \ln 10 = 1{,}029$.

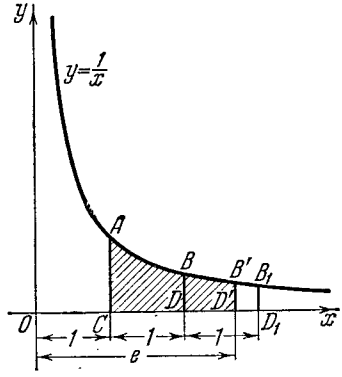

Рис. 34.

Существуют различные приемы, позволяющие найти e с любой точностью. Не останавливаясь на них, укажем только результат:

$$e \approx 2{,}71828$$

(все написанные знаки верные). В силу определения

$$\ln e = 1.$$

Число e называется *основанием* натуральных логарифмов или *неперовым* числом в честь шотландского математика Непера, опубликовавшего первую таблицу логарифмов (в 1614 году).

Пользуясь свойствами натурального логарифма, можно доказать следующее замечательное предложение: натуральный логарифм любого положительного числа b равен показателю степени, в которую нужно возвести число e, чтобы получить b. Иными словами: если $\ln b = \alpha$, то $b = e^{\alpha}$. Например, из того, что $\ln 2 \approx 0{,}69315$, следует, что $2 \approx e^{0{,}69315}$; из того, что $\ln 10 \approx 2{,}30259$, следует, что $10 \approx e^{2{,}30259}$ и т. п.

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством логарифма степени. Пусть $b = e^x$: тогда $\ln b = \ln e^x = x \ln e$. Но $\ln e = 1$, поэтому

$$\ln b = x,$$

т. е. натуральный логарифм b совпадает с показателем степени x.

Итак, натуральные логарифмы можно определить, не пользуясь геометрическими представлениями. Можно было бы сказать с самого начала, что натуральный логарифм числа b есть показатель степени, в которую нужно возвести число $e \approx 2{,}71828$, чтобы получить число b. Но при таком определении непонятно, почему нас интересуют показатели степени именно такого числа, как e, а не какого-либо другого. Если же натуральные логарифмы вводятся как площади, то тогда определение их становится наглядным и не вызывает никаких недоумений.

Остается добавить, что наряду с натуральными логарифмами можно вводить и другие при другом основании. Так, например, десятичный логарифм числа b — это показатель степени, в которую нужно возвести 10, чтобы получить b. Десятичный логарифм числа b обозначается так: $\lg b$. Если положить $\lg b = \beta$, то по определению должно быть $b = 10^\beta$; очевидно, что $\lg 10 = 1$. Десятичные логарифмы подробно изучаются в курсе алгебры восьмого класса средней школы, причем все их свойства выводятся не геометрическим путем, а на основании известных свойств показателей степени.

Между десятичными и натуральными логарифмами существует простая связь. Пусть $\ln b = \alpha$ и $\lg b = \beta$. Это означает, что $b = e^\alpha$ и $b = 10^\beta$, т. е. $e^\alpha = 10^\beta$. Следовательно, $\ln e^\alpha = \ln 10^\beta$ или $\alpha \ln e = \beta \ln 10$, т. е. $\alpha = \beta \cdot 2{,}30259$. Итак, $\ln b = 2{,}30259 \lg b$, откуда

$$\lg b = \frac{1}{2{,}30259} \ln b = 0{,}43429 \ln b.$$

Имея таблицу натуральных логарифмов и умножая каждый логарифм на 0,43429, получаем таблицу десятичных логарифмов.

Так, например,

$$\lg 2 = 0{,}43429 \ln 2 = 0{,}43429 \cdot 0{,}69315 \approx 0{,}30103.$$

Для $\lg 10$ мы должны получить единицу:

$$\lg 10 = 0{,}43429 \ln 10 \approx 0{,}43429 \cdot 2{,}30259 = 1.$$

То обстоятельство, что за основание системы десятичных логарифмов принимается число 10 — основание десятичной системы счисления, — значительно упрощает вычисления с логарифмами. Так, зная, что $\lg 2 = 0{,}30103$ и $\lg 10 = 1$, мы немедленно получаем:

$$\lg 20 = \lg 2 + \lg 10 = \lg 2 + 1 = 1{,}30103,$$

$$\lg 200 = \lg 2 + \lg 100 = \lg 2 + 2 = 2{,}30103$$

и т. д.

Если же, зная $\ln 2 = 0{,}69315$ и $\ln 10 = 2{,}302585$, мы хотим вычислить $\ln 20$ и $\ln 200$, то придется производить следующие выкладки:

$$\ln 20 = \ln 2 + \ln 10 = 0{,}69315 + 2{,}30259 = 2{,}99574,$$

$$\ln 200 = \ln 2 + \ln 100 = \ln 2 + 2 \ln 10 =$$

$$= 0{,}69315 + 4{,}60517 = 5{,}29832.$$

Поэтому, используя логарифмы как вспомогательное средство вычислений, предпочитают десятичные таблицы логарифмов. Это нисколько не умаляет значения натуральных логарифмов, появляющихся при решении самых разнообразных задач математики и естествознания. Две математические задачи, приводящие к натуральным логарифмам, — задача о площади под равнобочной гиперболой и задача Чебышева о распределении простых чисел — были указаны в этой книжке.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Для приближенного вычисления площади криволинейной трапеции мы заменяли ее то суммой площадей прямоугольников (стр. 8 и далее), то суммой площадей прямолинейных трапеций (стр. 32). С помощью последнего приема для $\ln 2$ было получено приближенное значение 0,6937. На стр. 42 другим путем было найдено значение $\ln 2$ с ошибкой, меньшей чем 0,000005, а именно, 0,69315. Значит, вычисление по способу трапеций привело к ошибке, большей чем 0,0005. И это несмотря на то, что отрезок CD на рис. 26, *а*) делился нами на немалое число частей (10) так, что высоты прямолинейных трапеций, представленные этими частями, составляли лишь по 0,1. Существуют другие приближенные способы, пригодные для любой криволинейной трапеции и дающие при такой же примерно по степени трудности вычислительной работе высокую точность. Мы познакомимся с одним таким способом, носящим имя английского математика Симпсона (Симпсон Томас, 1710—1761), хотя подобный способ на 75 лет раньше предложил его соотечественник Грегори (Грегори Джеймс, 1638—1675). Основная идея состоит в том, чтобы заменять дуги графика функции не хордами, как это делалось при использовании прямолинейных трапеций (см. рис. 26, *б* на стр. 31), а дугами *парабол*.

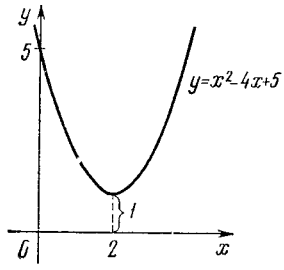

Рис. 35.

В учебнике алгебры для 6-го класса параболой называется график функции $y = ax^2$. Мы будем здесь использовать тот же термин в более широком смысле, называя параболой график любой функции вида $y = ax^2 + bx + c$. При $a \neq 0$ и $b = c = 0$ это — парабола в обычном ее положении, когда вершина находится в начале координат. Если по-прежнему $a \neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов b или c также отличен от нуля, то, как можно проверить, график этой функции — та же парабола, однако вершина ее перенесена в некоторую точку, отличную от начала (рис. 35). Наконец, если $a = 0$, то получим прямую $y = bx + c$. Зная это, будем по-прежнему именовать ее на этих страницах параболой, рассматривая прямую как частный случай параболы.

Докажем теперь, что через три точки плоскости $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ с попарно различными абсциссами x_0, x_1 и x_2 можно провести одну и только одну параболу. Это означает, что

найдутся коэффициенты a, b и c такие, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ будет проходить через каждую из указанных точек. При этом значения коэффициентов однозначно определятся выбором точек A, B и C.

Чтобы доказать это утверждение, будем рассматривать a, b и c как неизвестные. Их нужно найти так, чтобы выполнялись три условия: график функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $A(x_0, y_0)$ — первое условие, через точку $B(x_1, y_1)$ — второе условие и через точку $C(x_2, y_2)$ — третье условие. Иными словами, значение искомой функции при $x = x_0$ есть y_0, при $x = x_1$ есть y_1 и при $x = x_2$ есть $y = y_2$. Поэтому получаем три уравнения с тремя неизвестными a, b и c:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c, \tag{1}$$

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \tag{2}$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c. \tag{3}$$

Если вычесть почленно первое из второго, а второе из третьего, то придем к системе двух уравнений с неизвестными a и b:

$$y_1 - y_0 = a\left(x_1^2 - x_0^2\right) + b\left(x_1 - x_0\right), \tag{1'}$$

$$y_2 - y_1 = a\left(x_2^2 - x_1^2\right) + b\left(x_2 - x_1\right). \tag{2'}$$

Здесь удобно разделить все члены первого уравнения на $x_1 - x_0$, а второго на $x_2 - x_1$. По условию эти числа известны и отличны от нуля. Получим

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a\left(x_1 + x_0\right) + b, \tag{1''}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a\left(x_2 + x_1\right) + b. \tag{2''}$$

Наконец, вычтем из второго уравнения последней системы первое уравнение. Получим для определения a одно уравнение

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a\left(x_2 - x_0\right).$$

Из него найдем путем деления всех членов на число $x_2 - x_0$ ($\neq 0$) единственно возможное значение искомого коэффициента a. Подставим его, например, в уравнение (1''). Тогда из него сразу найдем также единственно возможное значение коэффициента b. Наконец, подставив найденные значения a и b в уравнение (1), найдем и единственно возможное значение последнего неизвестного коэффициента c. Мы намеренно не выполняем выкладок, чтобы не делать лишней работы. Сами значения для a, b и c будут, очевидно, рациональными выражениями от координат трех заданных точек (проследите за этим, начиная с a).

Из наших рассуждений вытекает, что никаких других значений, кроме указанных, коэффициенты a, b и c иметь не могут. Значит, возможна только одна парабола, проходящая через три заданные точки. Нетрудно проверить, что найденные значения a, b и c удовлетворяют уравнениям (1), (2), (3).

2. Возьмем теперь три точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$ с попарно различными абсциссами так, что $x_0 < x_1 < x_2$ и x_1 находится точно посередине отрезка $[x_0, x_2]$. Это значит, что $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$. По предыдущему через них проходит одна и только одна парабола $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 36). Рассмотрим площадь S криволинейной трапеции $ADEC$. Докажем, что она равна $\frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$. Иными словами, для параболы, проходящей через указанные точки, верна следующая формула:

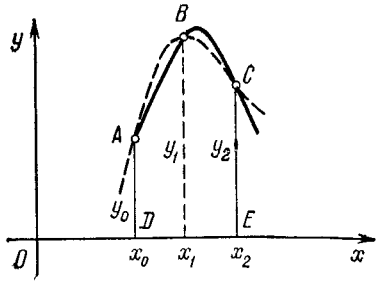

Рис. 36.

$$S = \frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (4)$$

Не исключено, что все три точки лежат на одной прямой. Если эта прямая параллельна оси Ox (рис. 37, *а*), то $y_2 = y_1 = y_0$ и для S получаем из формулы (4): $S = \frac{x_2 - x_0}{6} \cdot 6y_0 = (x_2 - x_0)\, y_0$. Но именно такова площадь соответствующего прямоугольника (согласно условию, введенному на стр. 7, она выразится отрицательным числом, если $y_0 < 0$). Если прямая не параллельна оси Ox (рис. 37, *б*), то S равна площади прямолинейной трапеции, взя-

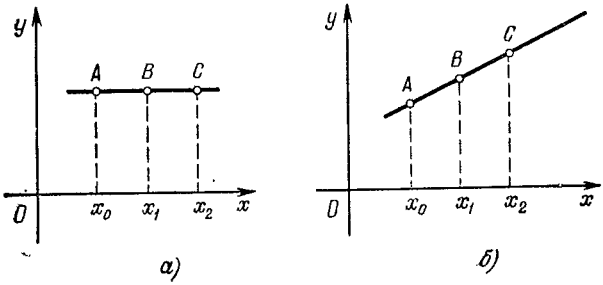

Рис. 37.

той с соответствующим знаком. Ее средняя линия равна $y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2}$, а высота равна $x_2 - x_0$. Заменяя в формуле (4) сумму $y_0 + y_2$ через $2y_1$, получаем $S = \frac{x_2 - x_0}{6}(2y_1 + 4y_1) = (x_2 - x_0)\, y_1$ — снова верный результат. Впрочем, для доказательства формулы (4) нет надобности особо выделять эти частные случаи. Во всех случаях доказательство остается одним и тем же.

Пусть коэффициенты a, b и c вычислены по способу, разъясненному в предыдущем пункте. Тогда $y = ax^2 + bx + c$ есть функция, график которой проходит через заданные точки. А это значит, что выполняются три равенства: (1), (2) и (3). Мы проведем доказательство формулы (4), не пользуясь выражениями коэффициентов a, b и c через координаты точек A, B и C (ведь мы их и не выписывали в п. 1). Фактически мы просто проверим, что формула верна. Читателю придется примириться с некоторой искусственностью этой проверки. Иначе пришлось бы находить выражения для a, b и c и проводить затем громоздкие выкладки.

Выразим сначала площадь S — ее можно назвать площадью параболической трапеции — в виде интеграла. Получим, используя известные свойства интеграла и формулы для $\int_{x_0}^{x_2} x^2\,dx$, $\int_{x_0}^{x_2} x\,dx$ и $\int_{x_0}^{x} dx$:

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (ax^2 + bx + c)\,dx = a\int_{x_0}^{x_2} x^2\,dx + b\int_{x_0}^{x_2} x\,dx + c\int_{x_0}^{x_2} dx =$$

$$= a\frac{x_2^3 - x_0^3}{3} + b\frac{x_2^2 - x_0^2}{2} + c(x_2 - x_0) =$$

$$= \frac{2a(x_2^3 - x_0^3) + 3b(x_2^2 - x_0^2) + 6c(x_2 - x_0)}{6}.$$

Все двучлены, находящиеся здесь в круглых скобках, имеют общий множитель $x_2 - x_0$. Относительно последнего это очевидно, но, кроме того, $x_2^2 - x_0^2 = (x_2 - x_0)(x_2 + x_0)$ и $x_2^3 - x_0^3 = (x_2 - x_0)(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2)$. Поэтому, вынося общий множитель за скобку, представим S в виде

$$S = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[a(2x_2^2 + 2x_2x_0 + 2x_0^2) + b(3x_2 + 3x_0) + 6c\right].$$

Сравнивая результат с доказываемой формулой (4), видим, что остается проверить равенство

$$a(2x_2^2 + 2x_2x_0 + 2x_0^2) + b(3x_2 + 3x_0) + 6c = y_0 + 4y_1 + y_2. \qquad (5)$$

Воспользуемся выражениями (1), (2), (3) для y_1, y_2 и y_3. Так как в левой части проверяемого равенства (5) не фигурирует абсцисса x_1 точки B, то при подстановке значения y_1 заменим предварительно x_1 выражением $\frac{x_0 + x_2}{2}$. Получим

$$y_1 = a\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + c,$$

откуда

$$4y_1 = a\left(x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2\right) + b\left(2x_0 + 2x_2\right) + 4c.$$

Следовательно,

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = \left(ax_0^2 + bx_0 + c\right) +$$

$$+\left[a\left(x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2\right) + b\left(2x_0 + 2x_2\right) + 4c\right] + \left(a_2x_2^2 + bx_2 + c\right) =$$

$$= a\left(2x_0^2 + 2x_0x_2 + 2x_2^2\right) + b\left(3x_0 + 3x_2\right) + 6c$$

(мы объединили члены, содержащие один и тот же коэффициент a, b или c). Итак, формула (5) верна, а вместе с ней верна и формула (4).

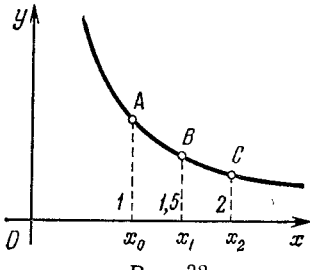

Рис. 38.

Пользуясь ею, можно сразу сказать, например, в случае, когда $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, а $y_0 = 2$, $y_1 = 4$, $y_2 = 3$, что площадь параболической трапеции $ADEC$ (рис. 36) равна $\frac{4-2}{6}(2 + 4 \cdot 4 + 3) = 7$. Здесь результат точный. Но через те же точки A, B и C может проходить график какой-либо другой функции, не являющийся параболой (на рис. 36 он изображен пунктиром). Если для подсчета площади соответствующей криволинейной трапеции пунктирную дугу заменить сплошной — дугой параболы, то предыдущий результат 7 будет уже не точным, а приближенным. Используя эту идею, вычислим, например, еще раз приближенное значение $\ln 2$. Речь идет о приближенном вычислении интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, причем дуга гиперболы $y = \frac{1}{x}$ приближенно заменяется дугой параболы, проходящей через точки A, B и C (рис. 38), для которых $x_0 = 1$, $x_2 = 2$, $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2} = 1{,}5$, а $y_0 = \frac{1}{x_0} = 1$, $y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ и $y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{3}$. На нашем рисунке парабола не обозначена, так как в этом случае она очень мало отличается от дуги гиперболы. Применяя формулу (4), получим

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{6}\left(1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{36} = 0{,}694\ldots$$

Приближение получилось неплохое; более точное значение $\ln 2$ есть 0,69315 (стр. 42).

3. Чтобы добиться возможно меньшей ошибки при приближенном вычислении $\int_a^b f(x)\,dx$, промежуток от a до b разбивают

предварительно на n равных частей. Тогда дуга графика функции $y = f(x)$ также разбивается на n дуг. Каждую из них мы приближенно заменяем по предыдущему дугой параболы. Тогда для интеграла получится приближенное выражение в виде суммы площадей n параболических трапеций. Каждую из них в отдельности можно найти с помощью формулы (4). В результате найдем приближенное значение интеграла.

Все сказанное можно выразить в виде формулы, которая и носит имя Симпсона.

Обозначим по порядку абсциссы точек, делящих промежуток от a до b на n равных частей, буквой x с четными индексами: $x_0 = a$, x_2, x_4, ..., x_{2n-2}, $x_{2n} = b$ (на рис. 39 $n = 8$). А x с нечетными индексами будут обозначать середины соответствующих частей, т. е. $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$, $x_3 = \frac{x_2 + x_4}{2}$, ..., $x_{2n-1} = \frac{x_{2n-2} + x_{2n}}{2}$. Каждую из дуг графика AB_1C_2, $C_2B_3C_4$, ..., ..., $C_{2n-2}B_{2n-1}C_{2n}$ заменим дугой параболы, проходящей через три точки: концы дуги и точку, расположенную над серединой соответствующего отрезка оси Ox. На рисунке мы не изображаем, однако, этих дуг, так как они почти сливаются с дугами рассматриваемого графика. Площади полученных параболических трапеций по формуле (4) будут выражаться так:

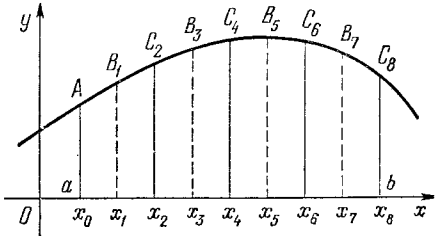

Рис. 39.

$$\frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),\ \frac{x_4 - x_2}{6}(y_2 + 4y_3 + y_4),\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{x_{2n} - x_{2n-2}}{6}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

а сумма их даст по предыдущему приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Прежде чем записывать эту сумму, заметим, что разность двух x с соседними четными номерами составляет $\frac{b-a}{n}$:

$$x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = \ldots = x_{2n} - x_{2n-2} = \frac{b-a}{n}.$$

Поэтому получаем, вынося общий множитель $\frac{b-a}{6n}$ за скобки:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})],$$

т. е. окончательно:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+$$

$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})]. \quad (6)$$

Это и есть формула Симпсона в ее общем виде. В квадратных скобках крайние ординаты берутся с коэффициентом 1, все прочие ординаты с четными индексами — с коэффициентом 2, а ординаты с нечетными индексами — с коэффициентом 4.

Формулу (4) в предыдущем пункте можно рассматривать как частный случай формулы Симпсона, когда мы пользуемся только одной параболической трапецией, т. е. $n=1$. Мы видим, что она дает, например, $\ln 2$ с ошибкой порядка 0,001. Убедимся, что при $n=5$ формула Симпсона позволяет вычислить $\ln 2$ с ошибкой порядка 0,0000001 Итак, применим формулу Симпсона (6) к вычислению $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, взяв $n=5$. Здесь $a=1$, $b=2$, $f(x)=\frac{1}{x}$; при $n=5$ получаем $x_0=1$, $x_2=1{,}2$, $x_4=1{,}4$, $x_6=1{,}6$, $x_8=1{,}8$, $x_{10}=2{,}0$, $x_1=1{,}1$, $x_3=1{,}3$, $x_5=1{,}5$, $x_7=1{,}7$, $x_9=1{,}9$. Значения ординат будем вычислять с семью знаками (с точностью до 0,00000005), и сразу составлять нужные суммы для подстановки в формулу Симпсона. Получим: $y_0=\frac{1}{x_0}=1{,}0000000$, $y_{10}=\frac{1}{x_{10}}=0{,}5000000$, $y_1+y_{10}=1{,}5000000$; $y_2=\frac{1}{x_2}=0{,}8333333$, $y_4=\frac{1}{x_4}=0{,}7142857$, $y_6=\frac{1}{x_6}=0{,}6250000$, $y_8=\frac{1}{x_8}=0{,}5555556$, $2(y_2+y_4+y_6+y_8)=5{,}4563492$; $y_1=\frac{1}{x_1}=0{,}9090909$, $y_3=\frac{1}{x_3}=$ $=0{,}7692308$, $y_5=\frac{1}{x_5}=0{,}6666667$, $y_7=\frac{1}{x_7}=0{,}5882353$, $y_9=\frac{1}{x_9}=$ $=0{,}5263158$, $4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)=13{,}8381580$. Поэтому формула (6) дает для $\ln 2$ (при $n=5$)

$$\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{6\cdot 5}(1{,}5000000+5{,}4563492+13{,}8381580)=0{,}693150.$$

Но с помощью формулы (*) на стр. 41 можно вычислять $\ln 2$ с любой степенью точности; нужно только положить $k=1$, как это сделано на стр. 42, и взять n достаточно большим. Так можно убедиться, что значение $\ln 2$ с восемью верными знаками есть 0,69314718. Следовательно, значение, полученное по формуле Симпсона, отличается от истинного на число порядка 0,000003, т. е. точность этой формулы в данном случае весьма высока.

Путем более сложного анализа можно показать, что формула Симпсона дает высокую точность даже при небольших n, когда график функции является очень плавным и пологим. Точность понижается, если график содержит очень крутые участки.

4. Применим формулу Симпсона к приближенному вычислению площади круга. Так как она пропорциональна квадрату радиуса, то достаточно сделать это для круга радиуса 1. Тогда площадь будет равняться, как мы знаем, $\pi \cdot 1^2 = \pi$. Значит, наша задача — вычислить приближенно число π с помощью формулы Симпсона. Пользуясь симметрией круга, вычисление сводим к четверти круга (рис. 40). Тогда результатом будет приближенное значение числа $\frac{\pi}{4}$.

Скажем заранее, что не следует ждать в данном случае высокой точности, хотя мы и проведем вычисление для $n = 8$. Всему виной чрезмерная крутизна графика в его правом конце. Ниже мы покажем, как можно поправить дело в этом случае. А пока обратимся к вычислениям. Так как y выражается через x по формуле $y = \sqrt{1 - x^2}$ (рис. 40), то задача заключается в вычислении интеграла $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ по формуле Симпсона, где мы примем $n = 8$. Абсциссы точек деления с четными номерами будут идти тогда через $\frac{1}{8}$, а с нечетными номерами отличаться от ближайших к ним из числа предыдущих на $\frac{1}{16}$. Получим: $x_0 = 0$, $x_{16} = 1$, $x_2 = \frac{1}{8}$, $x_4 = \frac{1}{4}$, $x_6 = \frac{3}{8}$, $x_8 = \frac{1}{2}$, $x_{10} = \frac{5}{8}$, $x_{12} = \frac{3}{4}$, $x_{14} = \frac{7}{8}$; $x_1 = \frac{1}{16}$, $x_3 = \frac{3}{16}$, $x_5 = \frac{5}{16}$, $x_7 = \frac{7}{16}$, $x_9 = \frac{9}{16}$, $x_{11} = \frac{11}{16}$, $x_{13} = \frac{13}{16}$, $x_{15} = \frac{15}{16}$. Вычислим соответствующие ординаты по формуле $y = \sqrt{1 - x^2}$ и попутно составим их суммы, нужные для подстановки в формулу Симпсона. Получим: $y_0 = 1$, $y_{16} = 0{,}0000$, $y_0 + y_{16} = 1{,}0000$, $y_2 = 0{,}9922$, $y_4 = 0{,}9682$, $y_6 = 0{,}9270$, $y_8 = 0{,}8660$, $y_{10} = 0{,}7806$, $y_{12} = 0{,}6614$, $y_{14} = 0{,}4841$; $2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14}) = 11{,}3590$; $y_1 = 0{,}9980$, $y_3 = 0{,}9823$, $y_5 = 0{,}9499$, $y_7 = 0{,}8992$, $y_9 = 0{,}8268$, $y_{11} = 0{,}7262$, $y_{13} = 0{,}5830$, $y_{15} = 0{,}3480$; $4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{15}) = 25{,}2536$. Поэтому

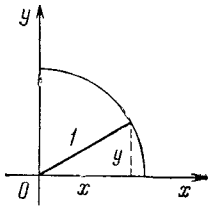

Рис. 40.

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx \approx \frac{1}{6 \cdot 8}(1{,}0000 + 11{,}3590 + 25{,}2536) = 0{,}7836.$$

Между тем число π, вычисленное другими средствами с точностью до 0,00005, есть 3,1416, откуда $\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$. Значит, результат, полученный выше по формуле Симпсона, содержит ошибку порядка 0,002; его следует округлить до 0,001: $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}784$.

Теперь используем формулу Симпсона для той же конечной цели (вычисление π), но в более выгодных условиях. Мы отодвинемся от крутого правого конца графика и рассмотрим интеграл $\int_0^{0,5} \sqrt{1-x^2}\,dx$. Если из этого интеграла, дающего площадь криволинейной трапеции $AOCD$ (рис. 41), вычесть площадь треугольника OCD, равную $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}2165064$, то получится площадь кругового сектора AOD с центральным углом $30°=\frac{360°}{12}$. Таким образом, разность $\int_0^{0,5}\sqrt{1-x^2}\,dx-0{,}2165064$ даст значение одной двенадцатой площади круга, т. е. $\frac{\pi}{12}$. Используем для вычисления $\int_0^{0,5}\sqrt{1-x^2}\,dx$ формулу Симпсона при $n=4$; тогда абсциссы точек деления x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 и x_8 останутся прежними. Но соответствующие ординаты будем вычислять теперь с семью знаками после запятой в расчете на высокую точность результата. Итак, получаем следующие значения для ординат и их сумм, фигурирующих в формуле Симпсона: $y_0=1{,}0000000$, $y_8=0{,}8660254$, $y_0+y_8=1{,}8660254$; $y_2=0{,}9921567$, $y_4=0{,}9682458$, $y_6=0{,}9270248$; $2(y_2+y_4+y_6)=5{,}7748546$; $y_1=0{,}9980450$, $y_3=0{,}9822646$, $y_5=0{,}9499178$, $y_7=0{,}8992184$, $4(y_1+y_3+y_5+y_7)=15{,}3177832$. Подставляя найденные значения сумм ординат в формулу Снмпсона, найдем

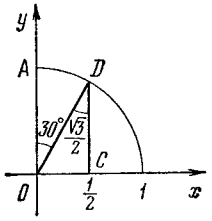

Рис. 41.

$$\int_0^{0,5}\sqrt{1-x^2}\,dx\approx\frac{0,5}{6\cdot4}(1{,}8660254+5{,}7748546+15{,}3177832)=0{,}4783055.$$

Отсюда, по предыдущему,

$$\frac{\pi}{12}=\int_0^{0,5}\sqrt{1-x^2}\,dx-0{,}2165064\approx0{,}2617991.$$

Насколько точно полученное значение видно из того, что, умножая его на 12 (от чего допущенная ошибка возрастет во столько же раз), получим для числа π значение 3,1415892. Но число π с точностью до 0,0000005 равно 3,141593 (можно найти его с помощью формулы Симпсона при бо́льших значениях n; есть, однако, и другие способы вычисления, требующие меньшей вычислительной работы). Следовательно, сохраняя в найденном результате лишь пять знаков после запятой, получим с точностью до 0,000005: $\pi\approx3{,}14159$. Это очень хорошее приближение к знаменитому числу π добыто путем умелого применения формулы Симпсона.

10 коп. 1000 ~ 5052

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шервatов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машина Поста.